华南农业大学学报(社会科学版)
2003年第2期 JOURNAL OF SOUTH CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY No.2 2003
(第2卷) (SOCIAL SCIENCE EDITION) (Vol.2)

三叉树模型下标的资产期权定价

郭子君[1], 张朝清[2]

(1. 华南农业大学 理学院, 广东 广州 510642; 2. 广东省环境保护学校, 广东 广州 510655)

摘 要: 讨论了一般三叉树模型期权定价公式, 它是二叉树模型的推广。证明了三叉树模型下期权价格所满足的方程是 Black-Scholes 方程的近似。

关键词: 三叉树模型; 期权; Black-Scholes 期权定价方程; 风险中性概率; 随机微分方程

中图分类号: F832; F930 文献标识码: A 文章编号: 1672-0202(2003)02-0061-05

一、背景与问题

在金融数学与金融工程中, 期权定价理论是我们的主要研究领域之一。在金融工具及其衍生产品的创新过程中, 期权定价理论起着核心的作用。由于 Black 与 Scholes 的杰出工作[1,2], 他们获得了 1997 年诺贝尔经济学奖, Black-Scholes 期权定价理论被广为称颂, 人们将其视为经典的金融分析技术。以 B-S 期权定价理论为基础, 考虑各种具体的金融产品, 如极大极小期权、汇率连动期权、重设期权以及利率衍生产品等, Black-Scholes 期权定价方程得到了各种各样的推广[3~6]。随着金融创新工程的不断深入, 更多的金融衍生产品及实物期权等待我们开发。然而, 依据 B-S 方程及其扩充方程来进行期权定价时, 在很多情形下, 方程的解析解是无法得到的。在实践中, 人们更多的是借助数值方法来对期权定价。二叉树模型[7] 是数值方法中已被广泛使用的模型。适当地选择二项分布的参数, 不断细分的二叉树模型能够正确地描述标的资产价格变化规律, 并依据无套利均衡分析原理, 利用二叉树的动态复制技术来为其期权定价。在二叉树模型中, 由于一时期内价格的变化只允许出现二种可能的状态, 从而导致数值计算误差偏大, 为了将误差控制在一定的精确度内, 必须对该期细分成若干个小的周期来获得足够多的状态, 但这又导致了计算量的指数级增长。为此, Kamrad B 等设想增加每一期的可能状态以提高计算的精确度[8], 1988 年 Boyle 将其拓展为三叉树模型, 其中上升与下降的两种状态是对称的[9], 1993 年, Tian 研究了三叉树模型方法, 获得了相应的风险中性概率, 其表达形式是时间的复杂指数函数[10]。

对于完全金融市场, 在二叉树理论框架下, 一时期内标的资产价格的变化只有二种可能的状态, 因此, 在无套利的动态复制过程中, 只需要二种相互独立的基本证券。当我们考虑标的资产可能出现更多的状态时, 就需要更多相互独立的基本证券才能动态地复制其他证券。对于三叉树模型, 一时期内可能的状态有三种; 期权是标的资产的金融衍生产品, 它与标的资产有高度的相关性, 因此我们可以用三种相互独立的基本证券来复制期权等金融衍生产品。

本文研究一般的三叉树模型下的期权定价, 对一期内价格变化的三种可能状态没有任何限制。考虑价格上升与下降状态不一定是对称的情形, 我们得到了多周期的三叉树期权定价公式, 并从理论分析与数值分析两方面证明了三叉树公式定价是 Black-Scholes 公式定价的近似。

收稿日期: 2002-12-25

作者简介: 郭子君(1965-), 男, 华南农业大学理学院副教授, 主要研究方向为金融数学、金融工程.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

二、三叉树期权定价模型

假设价格变化由以下三叉树模型描述：

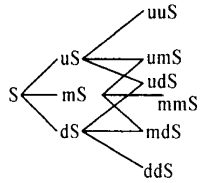


图1 标的资产价格三叉树图

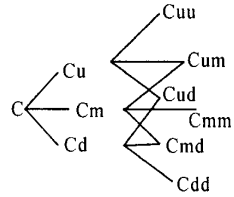


图2 期权价格三叉树图

在上图中，S 表示某股票价格，C 表示以该股票为标的资产的期权价格。uS，mS，dS（C_u，C_m，C_d）分别表示第一期后股票（期权）价格的三种状态，uuS、umS、udS，muS、mmS、mdS，duS、dmS、ddS（C_{uu}、C_{um}、C_{ud}，C_{mu}、C_{mm}、C_{md}，C_{du}、C_{dm}、C_{dd}）分别表示第二期后股票（期权）价格的三种状态。

由于无套利均衡分析方法不涉及参与者风险偏好，因此我们可以用风险中性分析方法为标的资产期权定价。风险中性分析方法的关键是构造出风险中性概率。设资产 A 的初始价格为 S_1，资产 B 的初始价格为 S_2，无风险资产的利率为 r，记 $\bar{r}=1+r$。我们用 Δ_1 份资产 A，Δ_2 份资产 B 及 L 份无风险资产来复制该种期权。从无套利均衡分析技术有：

$$\begin{cases}\Delta_1 u_1 S_1+\Delta_2 u_2 S_2+\bar{r}L=C_u\\ \Delta_1 m_1 S_1+\Delta_2 m_2 S_2+\bar{r}L=C_m\\ \Delta_1 d_1 S_1+\Delta_2 d_2 S_2+\bar{r}L=C_d\end{cases}$$ 解之得：

$$\Delta_1=\frac{(C_u-C_m)(u_2-d_2)-(C_m-C_d)(u_2-m_2)}{S_1[(u_1-m_1)(u_2-d_2)-(u_2-m_2)(m_1-d_1)]}$$

$$\Delta_2=\frac{(C_m-C_d)(u_1-d_1)-(C_u-C_m)(m_1-d_1)}{S_2}$$

$$L=\bar{r}^{-1}\left\{\frac{u_1[(C_u-C_m)(u_2-d_2)-(C_m-C_d)(u_2-m_2)]}{(u_1-m_1)(u_2-d_2)-(u_2-m_2)(m_1-d_1)}\right.$$
$$\left.+u_2(u_1-m_1)(C_m-C_d)-(m_1-d_1)(C_u-C_m)-C_u\right\}$$

记 $q_1=\dfrac{(\bar{r}-u_1)(m_2-d_2)}{(u_1-m_1)(m_2-d_2)-(u_2-m_2)(m_1-d_1)}-(\bar{r}-u_2)(u_1-m_1)+1$

$$q_2=\frac{(\bar{r}-u_1)(d_2-u_2)}{(u_1-m_1)(m_2-d_2)-(u_2-m_2)(m_1-d_1)}+(\bar{r}-u_2)(u_1-d_1)$$

$$q_3=\frac{(\bar{r}-u_1)(u_2-m_2)}{(u_1-m_1)(m_2-d_2)-(u_2-m_2)(m_1-d_1)}-(\bar{r}-u_2)(u_1-m_1)$$

则 $q_1+q_2+q_3=1$。其中 q_1，q_2，q_3 称为风险中性概率。

于是，单周期三叉树期权定价公式为：

$$C=\bar{r}^{-1}[q_1C_u+q_2C_m+q_3C_d]$$

从数学归纳法出发，我们得到多周期三叉树期权定价公式：

$$C=\bar{r}^{-n}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}q_1^i q_2^j(1-q_1-q_2)^{n-i-j}C_u^{\,i}m^{\,j}d^{(n-j-j)}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

三、三叉树模型的数学分析

众所周知，二叉树模型的极限结果是著名的 $B\text{-}S$ 模型。在风险中性假设下，我们可以把这个结论推广到三叉树模型中。

把$[t-\Delta t, t]$ 视为三叉树模型中一个周期，一周期后资产价格的可能状态为 up，mp，dp，对应于该标的资产的期权价格为$f(t, up)$，$f(t, mp)$，$f(t, dp)$。根据风险中性分析方法有：

$$f(t-\Delta t, p)=e^{-r\Delta t}[q_1 f(t, up)+q_2 f(t, mp)+q_3 f(t, dp)]$$

而：
$$f(t-\Delta t, p)=f(t, p)-\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\Delta t)^2+\circ((\Delta t)^2)$$

$$f(t-up)=f(t, p)-\frac{\partial f}{\partial p}(up-p)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(up-p)^2+\circ((up-p)^2)$$

$$f(t-mp)=f(t, p)-\frac{\partial f}{\partial p}(mp-p)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(mp-p)^2+\circ((mp-p)^2)$$

$$f(t-dp)=f(t, p)-\frac{\partial f}{\partial p}(dp-p)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(dp-p)^2+\circ((dp-p)^2)$$

$$e^{-r\Delta t}=1-r\Delta t+\frac{1}{2}r^2(\Delta t)^2+\circ((\Delta t)^2)$$

从而有：
$$\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t+rp\frac{\partial f}{\partial p}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\sigma^2 p^2\Delta t=rf\Delta t+\circ(\Delta t)$$

令 $\Delta t\to 0$，我们可得到 $B-S$ 期权定价方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t}rp\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\sigma^2 p^2=rf$$

由此推导过程可以发现三叉树模型是 $B\text{-}S$ 模型在时期 Δt 上的一阶近似。因此满足 $B\text{-}S$ 模型的期权定价问题可以通过三叉树模型得到近似价格。

四、三叉树模型的数值计算

设标的资产价格 p 服从以下随机微分方程（几何布朗运动）：

$$dp_t=ap_t dt+\sigma p_t dw_t,\quad t=t_0, p=p_0。$$

则股票价格在$(t, t, +\Delta t)$时期的变化可近似描述为：

$$p(t+\Delta t)=\begin{cases}Pe^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} & \text{以概率}p_1\\ P & \text{以概率}p_2,\\ Pe^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} & \text{以概率}p_3\end{cases}$$

其中 P 为股票价格在期初 t 时的值，$p_2=1-p_1-p_3$ 而 $p_1=\frac{1}{2\lambda^2}+\frac{(a-\sigma^2/2)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}$，$p_3=\frac{1}{2\lambda^2}-\frac{(a-\sigma^2/2)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}$，$\lambda>1$。

若 $\lambda=1$，三叉树模型退化成如下二叉树模型：

$$p(t+\Delta t)=\begin{cases}Pe^{\sigma\sqrt{\Delta t}}\text{以概率}p_1=\frac{1}{2}+\frac{(a-\sigma^2/2)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}\\ Pe^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\text{以概率}p_3=\frac{1}{2}+\frac{(a-\sigma^2/2)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}\end{cases}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.

以欧式买入期权为例，我们应用公式

$$C = \bar{r}^{-n}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}q_1^i q_2^j(1-q_1-q_2)^{n-i-j}C_{u^i m^j d^{(n-i-j)}},$$

其中 $C_{u^i m^j d^{(n-i-j)}} = \max(0, (u^i m^j d^{(n-i-j)} p_0 - K))$，$q_1$，$q_2$ 分别用 p_1，p_2 代替，而且 $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$，$m = 1$，$d = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$。

在风险中性世界，设股票的初始价格 $p_0 = 20$，$r = 0.04879$，$T = 7$ 个月，$\sigma = 0.20$，执行价为 $K = 17.5$，$\bar{r} = 1 + r = 1.04879$，通过 Maple 编程计算，我们得到如下期权价格误差表（表 1），其中误差定义为 Black-Scholes 公式定价的价格与三叉树或二叉树定价的价格之差。

表 1

λ \ n	10	30	50	70
1.41421	0.0075	−0.001	−0.0005	0.0005
1.05409	−0.0045	−0.001	0.0005	0.0005
1	−0.0095	−0.003	0.0025	−0.001

从上表可知，对于同样多的时期 n，λ=1 时二叉树期权定价的误差比 λ>1 时三叉树期权定价的误差要大，并且当 n 较大时，三叉树模型 n 期的计算结果要比二叉树模型 2n 期的计算结果更加精确。

五、结论

期权定价理论是金融工程的主要研究领域，近似计算定价方法中期权价格的精确度是我们必须认真研究的问题。在二叉树模型近似计算定价的基础上，为了将误差控制在一定的精确度内，且又不会使计算量过快增长，我们研究了一般情形下的三叉树模型，得到了多周期三叉树模型下的期权定价公式，用数学的方法及实证的方法验证了三叉树模型定价公式是 Black-scholes 及其扩展公式的一阶近似。

为了不断提高解的精确程度，数学上的方法是把期权的期限分成更多的时期来得到更多的状态，随之而来的问题就是数值计算量的快速增长。从计算的量来看，经试验表明，三叉树模型 n 期的计算量少于二叉树模型 2n 期的计算量，并且前者的计算结果更为精确。因此，研究三叉树模型对于将期权定价理论应用于实践具有重要意义。

参考文献：

[1] Black F, Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, (81): 637−654.

[2] Scholes M. Derivatives in a dynamic environment[J]. American Economic Review, 1998, 88(3): 351−369.

[3] （美）史树中译. 期权、期货和特种衍生证券—理论、应用和实践[M]. 北京：机械工业出版社，2002.

[4] （美）宋逢明译. 金融工程[M]. 北京：清华大学出版社，1998.

[5] 宋逢明. 金融工程原理[M]. 北京：清华大学出版社，1999.

[6] Paddock J L, Siegel D R and Smith J L. Option valuation of claims on real asset: The case of offshore petronleum leases[J]. Quarterly Journal of Economics, 1998, 103(3): 479−508.

[7] Cox J C, Ross S A and Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach[J]. Journal of Financial Economics,

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

1979, 9(7): 229—263.

[8] Kamrad B, Ritchken P. Multinomial approximating models for options with k states vaiables[J]. Management Science, 1991, 37: 1460—1652.

[9] Boyal P P. A lattice framework for option pricing with two state variables[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1988, 23: 1—23.

[10] Tian Y. A modified lattice approach to option pricing[J]. Journal of Futures Markets, 1993, 13: 563—577.

The Option Pricing under Multiplicative Triple Tree Model

GUO Zi-jun[1], ZHANG Chao-qing[2]

(1. *Science college, South china agriculture university, Guangzhou* 510642, *China*;
2. *Guangdong environmental defending college, Guangzhou* 510655, *China*)

Abstract: A discussion on the problem about asset option pricing is made, and the option pricing formula under the general triple tree model is obtained. It is proved that the equation of option value under triple tree model is approximate to Black-Scholes equation.

Key Words: triple tree model; option; black-scholes equation; risk neutral probability; stochastic differential equations

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.