第2卷 第1期 华南农学院学报 Vol.2, No.1
1981年3月 Journal of South China Agricultural College Mar., 1981

生物种群可忍受的最优收获方案的数学模型

陈 振 权

（基础部）

提 要

本文把 Beddington和 Taylor[1]的方法推广到生物种群雌雄繁殖的矩阵模型上，证明有一个既使生物种群保持可以复原的水平，又使收获量达到最优的收获决策存在。这就是：对雄性个体在一定年龄级以前全部保留，此年龄级以后全部收获；对雌性个体则除一个年龄级为部份收获外，其余也应在某年龄级以前全部保留，此年龄级以后全部收获。本文还分别就繁殖前和繁殖后两种不同阶段的收获情况，提出确定收获年龄和实际计算最优方案的方法，最后举例说明计算步骤。

一 引 言

对一个生物种群（人工饲养或天然繁殖）采取怎样的收获方案，既能使种群保持一定的、可以复原的水平，又使收获量（重量、头数或价值）达到最高，这是人们早已提出来的问题，1918年 Baranov[1] 曾以数学方法讨论过这个问题，但应用种群生长的矩阵理论来研究，则是由 Lefkovitch[2]和Williamson[3] 在1967年首先介绍的，晚近，Bosch〔1971〕[4]用矩阵模型研究了森林最优更新，Doubleday〔1975〕[5]证明了有关问题解的存在定理。Rorres〔1976〕[6]在较广泛的条件下进行了探讨，Beddington和Taylor〔1973〕[7]讨论了Leslie矩阵模型下的最优收获，不过，Beddington和Taylor限于讨论单个性别的生长、且在繁殖前收获的数学模型，本文把Beddington和Taylor的结果推广到两种性别在一个种群中同时计算的生长模型，除考虑繁殖前收获外，还考虑在繁殖后收获的不同情况，收获量也不限于讨论头数，它可以是价值，重量或其他生物量等等。这使数学更近乎实际，供研究生态平衡及经营者理论性参考。

设一个可划分年龄等级的种群在每个单位时间（称年）内，每个相同年龄级的雌性

有相同的生殖雌性子女及雄性子女的产仔率，而各年龄级的雌性及雄性又分别有其稳定成活率，则此种群的Leslie生长矩阵模型可以表为

$$V_{t+1}=MV_t,\quad 其中M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & m_1 & m_2\cdots m_{q-1} & m_q \\ a_1 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0\cdots 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0\cdots a_{p-1} & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & f_1 & f_2\cdots f_{q-1} & f_q \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 & 0\cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & b_2\cdots 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots b_{q-1} & 0 \end{pmatrix}$$

其中V_t是矢量，$V_t'=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_p,\ r_{p+1},\ \cdots,\ r_{p+q})$，这里$r_i$当$i\leqslant p$，表示t时间种群中i岁雄性的个数，当$i>p$，表示i岁雌性的个数。这样，$V_t$表示t单位时间整个种群的年龄分布。在$(p+q)\times(p+q)$矩阵M中，$a_i$表示t时间每个i岁雄性将能活到t+1时间(那时他是i+1岁)的概率，b_i表示t时间每个i岁雌性将能活到t+1时间的概率。f_i表示t时间每个i岁雌性在单位时间内生殖的并能活到下一个年头的雌性数，m_i表示t时间每个i岁雌性在单位时间内生殖的并能活到下一个年头的雄性数，并假设雄性没有活到超过p岁，雌性没有活到超过q岁的，这样一来，按照矩阵的乘法，MV_t便表示由t时间经过一个单位时间后种群的年龄分布，并把它记为$V_{t+1}=MV_t$。

定理1：对矩阵M存在一个正的、实的特征值λ，其值不小于M的其他特征值的绝对值，并且存在与λ对应的特征矢量，其所有元素均为非负的。

证：设位于M右下角的q阶Leslie型方阵为F，由于F元素的非负以及F为既约(Irreducible)矩阵，故F满足Perron—Frobenius定理（见〔q〕P.117—P.184）的条件，因此，F有正的、实的特征值λ存在，其值不小于F的其他特征值的绝对值，并且有对应λ的非负特征矢量记为$(r_{p+1},\ r_{p+2},\ \cdots,\ r_{p+q})$。

再由Laplace定理知成立

$$|M-\lambda I|=\lambda^p\,|F-\lambda I|$$

故λ也是M的特征值，并且就是满足定理所要求的特征值，再取

$$r_1=\frac{1}{\lambda}(m_1r_{p+1}+m_2r_{p+2}+\cdots+m_qr_{p+q}),\qquad r_2=\frac{a_1}{\lambda}r_1,\qquad r_3=\frac{a_2}{\lambda}r_2=\frac{a_1a_2}{\lambda^2}\gamma_1,\cdots,$$

$$r_p=\frac{a_1\cdots a_{p-1}}{\lambda^p}r_1.$$

令　　$V=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_p,\ r_{p+1},\ \cdots,\ r_{p+q})$

则V即是满足定理的特征矢量。

定理 1 的生物意义在于：随着时间的推移，种群必达到一个稳定的生长状态，即

$$MV=\lambda V \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

假设问题是要求种群的每一个年龄级均采取相同收获比例，在稳定生长情况下，若 $\lambda>1$，（若 $\lambda<1$ 可以证明无正收获可使种群无限次地生产下去），若按如下比例

$$H=\frac{\lambda-1}{\lambda}$$

进行收获，则到下一个单位时间，种群即能恢复原有水平，事实上

$$M\left(V-\frac{\lambda-1}{\lambda}V\right)=MV-\frac{\lambda-1}{\lambda}MV=\lambda V-\frac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\lambda V=V$$

这样的收获方案的确是生物种群可以忍受的，但容易指出，假如允许对每个年龄级按不同比例收获，如上的方案不是最优的，例如，如下生长矩阵模型A，考虑繁殖后的收获，收获量以个数计，

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 36\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

易见A有优特征值 2，A的稳定年龄分布（对应 2 的特征矢量）为 $V=\left(\frac{1}{29}\right)(24,\ 4,\ 1)'$，（V限制考虑其各分量之和为 1，否则，由于一般来说对正数 $\alpha>1$ 则 αV 得到比V更大的收获量，各种结构的种群的收获量大小便无从比较），对V所得到收获量是

$$(1,\ 1,\ 1)(AV-V)=1.$$

但若另取矢量 $V_1=\frac{1}{9}(6,\ 2,\ 1)'$，并采取这样的收获方案：在每次繁殖后的第一年龄级中收获6/7，其余年龄级保留原来数量，则这个种群繁殖后经过收获即恢复为 V_1，收获量却达到 4。

这说明：若各年龄级不按相同比例收获，可能得到更大收获量，下面便是讨论各年龄级不按相同比例收获对收获量的影响。

二、在繁殖前收获

在对一个种群V收获时，我们引入如下 $(p+q)\times(p+q)$ 非负对角矩阵D

$$D=\begin{pmatrix}\theta_1 & & & 0\\ & \theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \theta_{p+q}\end{pmatrix}$$

D中元素 θ_i 表示对V的第i年龄级进行收获后所留下来的比例数，$0\leqslant\theta_i\leqslant 1$，显然，$h_i=1-\theta_i$ 是V的第i年龄级中收获的所占比例，而且，由矩阵乘法知DV是种群在收获后所留下来的年龄分布矢量，再设 $C'=(c_1,\ c_2\cdots,\ c_{p+q})$ 表示种群的价值（重量、头数、或其他生物量）分布矢量，其中 c_i 表示第i年龄级中每个个体的价值，于是，所谓繁殖前收获的问题便可以描述为：

在约束：$MDV = V,\ V > 0$ ……………………（2）

的条件下，求矢量D及V使收获（价值）量

$$H = \frac{C'(I-D)V}{1'V}$$

达到最大值，其中$1'$表示$1' = (1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$是（$p+q$）维矢量。

显然

$$MD = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m_1\theta_{p+1} & m_2\theta_{p+2} & \cdots & m_{q-1}\theta_{p+q-1} & m_q\theta_{p+q} \\
a_1\theta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & a_2\theta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{p-1}\theta_{p-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_1\theta_{p+1} & f_2\theta_{p+2} & \cdots & f_{q-1}\theta_{p+q-1} & f_q\theta_{p+q} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1\theta_{p+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_2\theta_{p+2} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{q-1}\theta_{p+q-1} & 0
\end{bmatrix}$$

要满足约束条件，就是要确定θ_i使方程

$$|MD - I| = 0 \text{ ……………………（3）}$$

成立。展开左边行列式即得

$$\theta_{p+1}f_1 + \theta_{p+1}\theta_{p+2}b_1f_2 + \cdots + \theta_{p+1}\theta_{p+2}\cdots\theta_{p+q}b_1\cdots b_{q-1}f_q = 1 \text{ …………（4）}$$

再由（2）可以求得满足约束条件（2）的一个矢量为

$$V = (s,\ \theta_1a_1s,\ \cdots,\ \theta_1\theta_2\cdots\theta_{p-1}a_1\cdots a_{p-1}s,\ 1,\ \theta_{p+1}b_1,\ \cdots,\ \theta_{p+1}\cdots\theta_{p+q-1}b_1\cdots b_{q-1})$$

其中　$s = m_1\theta_{p+1} + m_2\theta_{p+1}\theta_{p+2}b_1 + \cdots + m_q\theta_{p+1}\cdots\theta_{p+q}b_1\cdots b_{q-1}$

这样在稳定生长情况下，总收获量为

$$\begin{aligned}
H &= C'(1-D)V/1'V \\
&= [c_1(1-\theta_1)S + c_2(1-\theta_2)\theta_1a_1s + \cdots + c_p(1-\theta_p)\theta_1\cdots\theta_{p-1}a_1\cdots a_{p-1}S + \\
&\quad + c_{p+1}(1-\theta_{p+1}) + c_{p+2}(1-\theta_{p+2})\theta_{p+1}b_1 + \cdots + c_{p+q}(1-\theta_{p+q})\theta_{p+1}\cdots \\
&\quad \cdots\theta_{p+q-1}b_1\cdots b_{q-1}] / [S + \theta_1a_1S + \cdots + \theta_1\cdots\theta_{p-1}a_1\cdots a_{p-1}S + 1 + \theta_{p+1}b_1 + \\
&\quad + \cdots + \theta_{p+1}\cdots\theta_{p+q-1}b_1\cdots b_{q-1}] \text{ ……………………………………（5）}
\end{aligned}$$

现在来确定既满足（4）又使H达到最大值的$\{\theta_i\}$：

1．当$i \leqslant p$时θ_i的确定：

由于$i \leqslant p$，（4）式中不含θ_i，这里只需由（5）式考虑θ_i对H的影响，容易看出，设$i \leqslant p$，$j \neq i$时所有θ_j已取定值，则H的分子分母均为θ_i的线性函数，从而H是

$0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$ 上的单调函数，从而H在θ_i的端值0或1处达到最大。因此，对于任何一个θ_k（$k \leqslant p$）若θ_k不等于0或1，便可以由如上理由把它改为0或1而使H的值增大。

从H及V的结构，我们还注意到：若有某个$\theta_j = 0$，则当$j < i \leqslant p$时，θ_i对H及V便失去影响，由是，要使H达到最大值，对雄性便应采取如下收获方案：有某个年龄L存在（$L \leqslant p$）当$i < L$时$\theta_i = 1$，当$i \geqslant L$时$\theta_i = 0$。

当然，若饲养业中雄性各年龄级要有一定数量的条件，需另作处理。

2．当$i > p$时θi的确定

设对雄性采取的收获方案中当$j \geqslant L$时$\theta_j = 0$已取定，要确定对雌性方案就是要在（4）式的限制下，确定θ_i使（5）式中的H达到最大，注意：若$\theta_k = 0$，则$i > k > p$，θ_i对（4）及（5）均失去影响，因此，不妨设$\theta_i > 0$，（当$i < k$），这时，包含雄性在内的整个收获方案记为$\{\theta_i\}$，它所对应的收获量记为$H_{L,k}$，（$L = 1, 2, \cdots, p$，$k = 1, 2, \cdots q$）。

我们来看雌性中采取的方案对H的影响，在$\{\theta_i\}$中取出两个其值不为1的θ_r及θ_t，$p < r < t < p + q$，视θ_i，$i \neq r, k$，均已取定，这时，（4）式可以写为

$$D - \theta_r(B + \theta_t C) = O \qquad (6)$$

其中D，B及C均为θ_i（$p < i \neq r, k$）的函数，再类似地把（5）式写为

$$H_{L,k}(\theta_r, \theta_t) = \frac{R + \theta_r(E + \theta_t S)}{G + \theta_r(N + \theta_t Q)} \qquad (7)$$

其中R、E、S、G、N及G均为θ_i（$i \neq t, r$）的函数，且R、G、N及Q均大于0，由（6）解出θ_t代入（7）得：

$$H_{L,k}(\theta_r) = \frac{RC + EC\theta_r + S(D - B\theta_r)}{GC + NC\theta_r + Q(D - B\theta_r)} \qquad (8)$$

（8）式的分子分母在$0 < \theta_r < 1$上均为正的，且均为θ_r的线性函数，因此，$H_{L,k}$在$0 < \theta_r < 1$上（$0 < \theta_t < 1$）是θ_r的单调函数，从而$H_{L,k}(\theta_r)$必在θ_r的端点值处达到最大值，另一方面由（6）得

$$\theta_r = \frac{D}{B + C\theta_t}$$

当$D \leqslant B$时，θ_r的端值（$0 < \theta_r < 1$，$0 < \theta_t < 1$）为：$\theta_r = \frac{D}{B}$，$\theta_t = 0$以及$\theta_r = \frac{D}{B + C}$，$\theta_t = 1$，

当$D > B$时，θ_r的端值为：$\theta_r = 1$，$\theta_t = \frac{D - B}{C}$，以及$\theta_r = \frac{D}{B + C}$，$\theta_t = 1$，

这就是说，无论何种情况，总可以把θ_r及θ_t中的一个改为0或1，而使$H_{L,k}$的值增大，也就是，在方案$\{\theta_i\}$中，若有两个θ_i不等于1，$p < i < k$，便可以重复上述理由把其中一个改为0或1而使H_L,k增大，我们这样做，直到方案中只有一个θ_r不为1为止。

当对L，k，及θ_r的所有可能值代入（5）求出$H_{L,k}$，其中使$H_{L,k}$达到最大的方案$\{\theta_i\}$，即为所求的最优方案，由是，有如下定理：

定理2：在稳定生长情况下，在繁殖前收获，一个既使种群保持一定的可以复原的水平，又使收获量达到最高的方案是：对雄性在一定年龄级以前全保留，此年龄级后全收获；对雌性则除一个年龄级为部份收获外，其余是在某年龄级以前全保留，而以后的年龄级全收获。

这里有趣的是：在两性别的生长模型下，在收获的最优方案中，进行部份收获的年龄级为落在雌性，而不在雄性之中，

注：若M中所有$a_i=0$，所有$m_i=0$，即得到 Beddington和Taylor〔7〕的结论。

三、在繁殖后收获

在繁殖后收获，我们的问题变为：

在约束： $DMV=V,\quad V>0$ ……………………… (9)

的条件下，求矢量D及V使收获量

$$H=\frac{C'(I-D)MV}{1'V} \quad \cdots\cdots (10)$$

达到最大值。

求H最大值可以用上节类似的方法进行：

这时方程$|DM-I|=0$为

$$\theta_{p+1}f_1+\theta_{p+1}\theta_{p+2}b_1f_2+\cdots+\theta_{p+1}\cdots\theta_{p+q}b_1\cdots b_{q-1}f_q=1 \quad \cdots\cdots (11)$$

方程(11)与上节中的(4)完全一样，但满足$DMV=V$的一个特征矢量V变成了：

$$V=(S',\ \theta_2a_1S',\ \cdots,\ \theta_2\cdots\theta_pa_1\cdots a_{p-1}S',\ 1,\ \theta_{p+2}b_1,\ \cdots,\ \theta_{p+2}\cdots\theta_{p+q}b_1\cdots b_{q-1})'$$

其中$S'=\theta_1[m_1+m_2\theta_{p+2}b_1+\cdots+m_q\theta_{p+2}\cdots\theta_{p+q}b_1\cdots b_{q-1}]$

要注意的是在(10)中还要计算MV：

$$MV=(S'',\ a_1S',\ a_1a_2\theta_2S',\ \cdots,\ a_1\cdots a_{p-1}\theta_2\cdots\theta_{p-1}S',\ S''',\ b_1,\ \theta_{p+2}b_1b_2,\ \cdots,\ \theta_{p+2}\cdots\theta_{p+q-1}b_1\cdots b_{q-1})'$$

其中$S''=m_1+m_2\theta_{p+2}b_1+\cdots+m_q\theta_{p+2}\cdots\theta_{p+q}b_1\cdots b_{q-1}$

$S'''=f_1+f_2\theta_{p+2}b_1+\cdots+f_q\theta_{p+2}\cdots\theta_{p+q}b_1\cdots b_{q-1}$

把C′、V及MV代入(10)得：

$$\begin{aligned}H&=C'(I-D)MV/1'V\\&=[c_1(1-\theta_1)S''+c_2(1-\theta_2)a_1S'+c_3(1-\theta_3)\theta_2a_1a_2S'+\cdots+c_p(1-\theta_p)\theta_2\\&\quad\cdots\theta_{p-1}a_1\cdots a_{p-1}S'+c_{p+1}(1-\theta_{p+1})S'''+c_{p+2}(1-\theta_{p+2})b_1+c_{p+3}(1-\theta_{p+3})\\&\quad\theta_{p+2}b_1b_2+\cdots+c_{p+q}(1-\theta_{p+q})\theta_{p+2}\cdots\theta_{p+q-1}b_1\cdots b_{q-1}]/[S'+\theta_2a_1S'+\\&\quad+\cdots+\theta_2\cdots\theta_pa_1\cdots a_{p-1}S'+1+\theta_{p+2}b_1+\cdots+\theta_{p+2}\cdots\theta_{p+q}b_1\cdots b_{q-1}]\end{aligned}$$

由于约束条件(11)与(4)相同，H的分子分母对每θ_i(视θ_j，$j\neq i$已取定)是θ_i的线性函数，我们可类似上节的讨论，证明如下定理。

定理3：在稳定生长情况下，在繁殖后进行收获，则定理2的结论仍然成立。

四、计 算 举 例

由于函数H总是在只有某一个θ_r（$p<r\leqslant k$）为小于1或等于1的正数，而其余θ_i非0即1的情况下达到最大值，我们便可把$\{\theta_i\}$的各种可能列举出来，求出对应的$H_{L,k}$，再比较$H_{L,K}$而找出最优方案：具体做法如下：

1．依次设k值为q，q－1，q－2，…，2，1．对每个k值分别取r为p＋k－1，p＋k－2，…，p＋1。并对$i\neq r$，令$\theta_i=1$，代入（4）或（11）解出θ_r。

2．对每个值在0到1之间的θ_r连同$\theta_i=1$（$i\neq r$），以及L分别为p－1，p－2，…，2，1，的情形，求出$H_{L,k}$。

3．比较$H_{L,k}$，对应$H_{L,k}$为最大值的方案$\{\theta_i\}$即为所求的最优方案。

例：设有如下生长矩阵M，若$C'=(1, 10, 100, 1, 10, 100)$，求最优收获方案。

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1．繁殖前收获：

求出对应方程（4）为：$3\theta_4\theta_5+2\theta_4\theta_5\theta_6=1$　　(12)

从(12)看$\theta_6=\theta_r$不能成立，θ_6只可能取1以及0，因此θ_r的可能值为$\theta_r=\theta_4=\frac{1}{5}$，或$\theta_r=\theta_5=\frac{1}{5}$以及$\theta_r=\theta_4=\frac{1}{3}$或$\theta_r=\theta_5=\frac{1}{3}$，再把$\theta_i$的各值代入（5）中得：$H(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6)$的值：

$H(1, 1, 0, \frac{1}{5}, 1, 1)=5.99$，$H(1, 1, 0, 1, \frac{1}{5}, 1)=6.08$

$H(1, 0, 0, \frac{1}{5}, 1, 1)=2.14$，$H(1, 0, 0, 1, \frac{1}{5}, 1)=2.63$

$H(1, 1, 0, 1, \frac{1}{3}, 0)=7.87$，$H(1, 1, 0, \frac{1}{3}, 1, 0)=7.94$

故

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \frac{1}{3} & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

为最优方案，由此算出种群分布矢量为

$$V=\left(\frac{1}{143}\right)(48, 24, 8, 54, 6, 3)$$

得到收获量为：7.94。

2．繁殖后收获

求出对应（11）的方程为：　$3\theta_4\theta_5+2\theta_4\theta_5\theta_6=1$　　（13）

此方程与（12）同，故θ_r的可能取值相同，由此代入

$$H=\frac{C'(I-D)MV}{1'V}$$

计算得到：

$H(1,1,0,\frac{1}{5},1,1)=6.5873$，$H(1,0,0,\frac{1}{5},1,1)=3.5211$

$H(1,1,0,1,\frac{1}{5},1)=7.1296$，$H(1,0,0,\frac{1}{3},1,0)=8$

$H(1,1,0,1,\frac{1}{3},0)=9.2424$，$H(1,1,0,\frac{1}{3},1,0)=11.8333$

因此，得最优方案为：

$$D=\begin{bmatrix}1 & & & & & 0\\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \frac{1}{3} & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 0\end{bmatrix}$$

由此计算出种群年龄分布矢量为

$$V=\left(\frac{1}{16}\right)(8,\ 4,\ 0,\ 3,\ 1,\ 0)$$

得到收获量为11.8333。

注：1，本文也可用线性规划方法计算。

2，当生物种群不能按年龄划分时，如虫按阶段划分，鱼按长度划分等等，应用Lefkovitch矩阵模型〔10〕计算，可以证明以上定理仍成立。

参 考 文 献

〔1〕Baranov, T.I.(1918).On the question of the biological basis of Fisheries. Nauch, issledov, iktiol.IZV.I(1), 81—128, Moscow.

〔2〕Lefkovitch, L.P.(1967).A theoretical evaluation of population growth after removing individuals. from some age groups.Bull.Ent.Res.57, 437—45.

〔3〕Williamson M.H.(1967). Introlducing students to the concepts of population dynamics.P.169—76 in the teaching of Ecology. Ed.J.M. Lambert. Blackwall Scientific Publications, Oxford & Edinburgh.

〔4〕Bosch, C.A.(1971).Redwoods: A population model, Science, 172, 345—9.

〔5〕Doubleday, W.G.(1975).Harvesting in matrix population models.Biometrics 31, 189—201.

〔6〕Rorres(1976).Optimal sustainable yield of a renewable resource.Biometrics, 32, 945—948.

〔7〕Beddington, Z.R.and Taylor, D.B.(1973). Optimal age specific harvesting of a population.Biometrics 29, 801—9.

〔8〕Keyfitz and Murphy(1967). Matrix and Multiple decrement in population analysis. Biometrics 23, 485—505.

〔9〕Joel N.Franklin(1968).Matrix theory.Prentice-Hall, Inc.Englewood cliffs.

〔10〕Lefkovitch, L.P.(1965). The study of population growth in organisms grouped by stages.Biometrics 21, 1—18.

A MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMAL SUSTAINABLE HARVESTING OF POPULATION

Chen Zhen-quan

(Department of Fundamental Sciences)

ABSTRACT

This paper attempts to develop a mathematical model of optimal sustainable yield of a renewable population of two sexes. Harvesting policies involving the removal of before or after reproduction are considered. It is shown that the harvesting policg which maximizes the yield is one in which each class of the population is either completely harvested or not harvested at all, with at most one exceptional class of the female. At the end, an example is given to illustrate this model.