华南农业大学学报 7（4）1986：56—62
Journal of South China Agric. U.

求与空间四条异面直线相切的球中最小的球

陈 鸿 志

（农业工程系）

提 要

本文运用推理的方法，根据“画法几何学”的基本理论和作图原理，完全用图解法先将空间四条异面直线分成几组逐个解决，然后统一求解。即先作球与二条异面直线相切，进而三条最后四条。这样作的特点是推理清晰，图解方便、作图准确。假设空间四条异面直线为A·B·C·D，分组情况如下：1．A·B和A·C直线组．2．A·B和A·D直线组．3．A·B·C和A·B·D直线组．4．A·B·C·D直线组．

前 言

本题取自“美国工程教育协会——《工程设计图学学报》(The American Society for Engineering Education——Engineering Design Graphics Journal) 1982年第二期第46页难题之角（Puzzle corner），罗伯P·凯索教授（Robert P. Kelso）的最新难题原文如下：

Given: Four non—parallel unlimited Skew lines in general position Determine: The center of the smallest sphere which is tangent to all of the given lines.

该题曾先后于1980、1981、1982年连续三次刊登于该学报的难题之角园地公开征求解答，几年来国内外不少学者曾对此题进行了广泛的研究和讨论，但直至1985年10月止该学报尚没有应解者的解答刊出。

现将本文的解答论述如下：

分 析

（一）A·B和A·C直线组的作图分析

我们知道过A·B两异面直线中任意一条上的任意一点（例如A线上的A_0点），都可以作无穷多个球与A·B两异面直线相切，其球心轨迹位于A线上过A_0点且垂直A线的

1986年2月17日收稿

平面P_0内（图2—1）。同样，过A线上的同一点A_0，也可以作无穷多个球与A·C两异面直线相切。这样，与A·C线相切的球心轨迹也位于同一个平面P_0内。因此，与A·B线和A·C线分别相切的球心轨迹在P_0面内相交于一点（abc）。该点便成了与A·B·C三异面直线均相切的球心。由此可以看出，在三异面直线中任一条上的任一点，都可以作一个球与三异面直线均相切。

（二）A·B和A·D直线组的作图分析

按照上面的方法，过A线上的A_0点也可以作无穷多个球与D线相切，其球心轨迹也位于A线上过A_0点且与A线垂直的平面P_0内，这样，与A·D线相切的球心轨迹，在P_0平面内也与和A·B相切的球心轨迹相交于一点(abd)。（图3—1），该点也就是与A·B·D三异面直线均相切的球心。

由上面两组作图可以看出这样一点，即过A线上的一点可以分别作出与A·B·C和A·B·D相切的球，而且都是相交于与A·B线相切的球心轨迹上，亦即与A·B·C和A·B·D分别相切的球心同位于一条曲线上。（由于都是以A线出发作图的）。（图1—2）。

（三）A·B·C和A·B·D直线组的作图分析

前面已经谈到，过三条异面直线中任一条上的任一点都可以作一个球与三异面直线均相切，而每条直线上均有无穷多个点，亦即可以作无穷多个球与三异面直线均相切。这样，如上所述，过A线上的A_0点可以作出一个分别与A·B·C和A·B·D均相切的球，由于A线上有无穷多个点（本题将其分为A_0～A_4），故可以分别作出无穷多个球与A·B·C和A·B·D三异面直线均相切，其球心又分别位于过A线上各点且与A线垂直的平面（P_1～P_4）内，而这些球心在各个面上均是交于与A·B线相切的球心轨迹线上。这样，将各个面上与A·B·C和A·B·D均相切的球心光滑地连成一曲线即得到分别与A·B·C和A·B·D均相切的球心轨迹线，由于这两条轨迹线，同位于由与A·B相切的球心轨迹线所形成的同一个曲面上，故其交点，即为与A·B·C·D四条异面直线均相切的球心了（图1—2）。

作图步骤

为了作图方便起见，令四条异面直线中的A线处于铅垂位置。如图1—1所示：

1．分别作与A·B线和A·C线相切的球。

将A线分为5点(A_0～A_4)，首先过A_0作球与B线上各点相切(A_0为切点)图2—1，在P_0面内得A_0点与B线上各点（B_0～B_4）相切的球心轨迹为$(AB)_0$～$(AB)_4$……

（1）过A线上的A_0点作面P_0垂直A线（图2—1），因此，过A线上的A_0点与B线上各点（B_0～B_4）所作的球，其球心轨迹均位于P_0面内。

（2）过B线上各点(B_0～B_4)作面垂直B线，且求出它们与平面P_0的交线（b_0p_0，b_1p_0～b_4p_0）。

（3）连A_0B_0、A_0B_1～A_0B_4，并分别作它们的中垂面，求各中垂面与各交线的交点，即$(AB)_0$～$(AB)_4$（水平投影为$(ab)_0$～$(ab)_4$），此即过A线上的A_0点与B线上各点所作相切球的球心，将它们光滑地连成一曲线，便是过A线上的A_0点作球与

B线上的各点相切的球在P_0面上的球心轨迹。

（4）按上述方法也可以求出A线上的A_0点与C线上的各点相切球的球心轨迹也在P_0面上。

（5）以上两条轨迹曲线在P_0面内的交点$(ABC)_0$即为过A线上的A_0点与A·B·C三异面直线均相切的球心。

（6）同理过A线上的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅵ各点，还可以分别作出与A·B·C三异面直线均相切的球心（$ABC)_1$～（$ABC)_4$（图2—2）～（2—5），将这些球心光滑地连成一曲线，即为与A·B·C三异面直线均相切的球心轨迹（图2—6），该轨迹位于由与A·B相切的球心在各个面上（P_0～P_4）的轨迹所形成的曲面上（图1—2）。

（7）同样，A·B·D直线组也可按此法求出与它们均相切的球心（$ABD)_0$～（$ABD)_4$（图3—1）～（图3—5），将它们光滑地连成一曲线，也得到与A·B·D三异面直线均相切的球心轨迹（图3—6），该球心轨迹也位于由与A·B相切球的球心在各个面上（P_0～P_4）的轨迹所形成的曲面上（图1—2），由于与A·B·D和A·B·C均相切的球心轨迹同位于一个曲面上，因此（$ABC)_0$～（$ABC)_4$与（$ABD)_0$～（$ABD)_4$两轨迹的交点0，即所求与四异面直线A·B·C·D均相切的球心。

验　证

从图4中可知，与四条异面直线均相切的球心为O，半径为$\overline{oa}$，利用换面法，可分别求出（ob_1—b_1），（oc_1—c_1）和（od_1—d_1），且它们都是相等的，故作法是正确的。

本作法有二解，因为与A·B·C·D四异面直线均相切的球，应成对地出现，本例只作了一解，另一解由于与A·B·C和A·B·D相切的球心轨迹在图内无交点，故无作出。（图1—2）。

另外，我们如果分别以四条异面直线为准线（作图的起点）如A线一样令其为铅垂线，则还可以作出六个与A·B·C·D四条异直线均相切的球，则本题共有八个解。

如果按此法作出八个球，则可求出与四条异面直线均相切的球中最小的一个球，因它们的半径，在水平面中的投影可直接反映它们的实长，本例所求出的球O，即为该例八个相切于四条异面直线的球中最小的球（图4）。

参 考 文 献

〔1〕大连工学院工程画教研室编：《画法几何学》修订本，高等教育出版社，1979年。
〔2〕A·K鲁达也夫著李敏译：《画法几何习题集》、（苏）；人民教育出版社。
〔3〕A·N·多布尔雅科夫朱福熙等译著，画法几何教程，人民教育出版社。
〔4〕E·G·Pare, R·O·Loving 1977 Descriptive Geometry.
〔5〕Engineering Design Graphics Journal 1981, 2.76 1982.2.46.

DETERMINE: THE CENTER OF THE SMALLEST SPHERE WHICH IS TANGENT TO FOUR NON-PARALLEL UNLIMITED SKEW LINES IN GENERAL POSITIONS

Chen Hongzhi
(Department of Agricultural Engineering)

ABSTRACT

This article is concerned about diagrammatically grouping four non-coplanar lines in space to seek their inscribed sphere by means of reasoning method based on the Descriptive Geometry. First draw spheres tangential to two lines, then three lines, last four lines. Given A · B · C · D as the four non-coplanar lines in space, and A at perpendicular position (see Fig. 1), the groups are as follows:

1. A · B and A · C line-group
2. A · B and A · D line-group
3. A · B · C and A · B · D line-group
4. A · B · C · D line-group

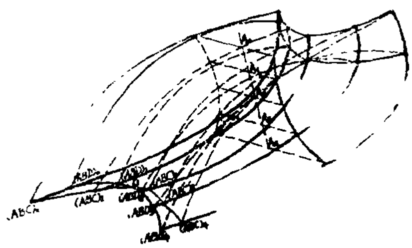

图1—2 A线上的各点 (A_0～A_4) 分别与A · B, A · C, A · D相切的球在各个平面 (p_0～p_4) 内的球心轨迹所形成的曲面体，交线 $(ABC)_0$～$(ABC)_4$与 $(ABD)_0$～$(ABD)_4$分别为与ABC和ABD相切的球心轨迹，交点O为与A · B · C · D四异面直线均相切的的球心。
(1) A线上的A_0点与B线上各点相切的球在p_0面上的球心轨迹。
(2) A线上的A_0点与D线上各点相切的球在p_0面上的球心轨迹。
(3) A线上的A_0点与C线上的各点相切的球在p_0面上的球心轨迹。
(4) 由各平面上的球心轨迹所形成的曲面体断面形状。

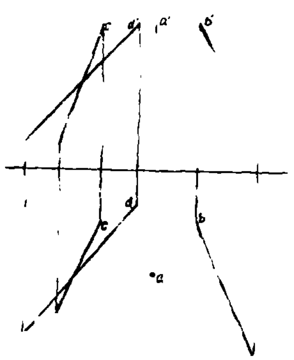

图1—1 空间四条异面直线的相对位置

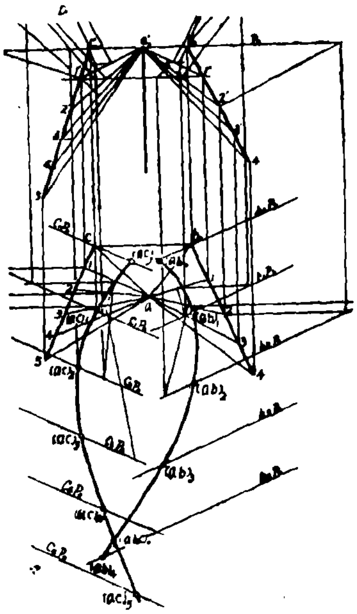

图2—1 A线上的点A_0与B·C线上各点相切的球在p_0面上的球心轨迹，得与A·B·C三异面直线均相切的球心（abc）。

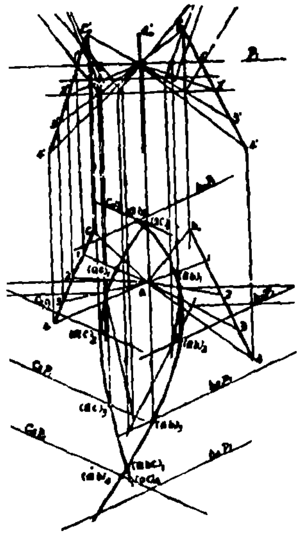

图2—2 A线上的点A_1与B·C线上各点相切的球在p_1面内的球心轨迹，交点（abc）$_1$为与A·B·C三异面直线均相切的球心。

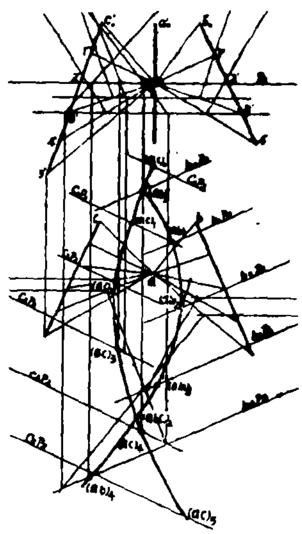

图2—3 A线上点A_2与B·C线上的各点相切的球在p_2面上的球心轨迹，交点(abc)$_2$为与A·B·C三异面直线均相切的球心。

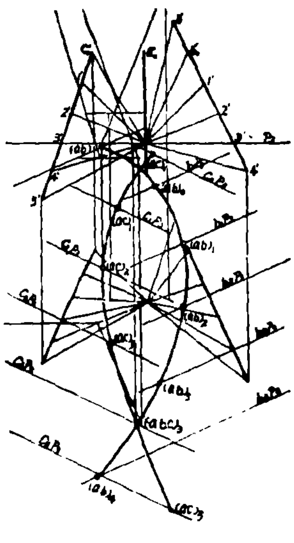

图2—4 A线上的点A_3与B·C线上各点相切的球在p_3面上的球心轨迹，交点（abc）$_3$为与A·B·C三异面直线均相切的球心。

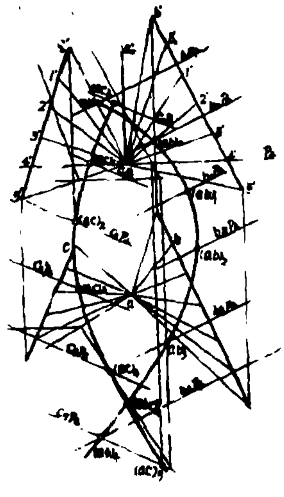

图2—5 A线上的点A_4与B·C线上各点相切的球在p_4平面上的球心轨迹，交点（abc）$_4$为与A·B·C三异面直线均相切的球心。

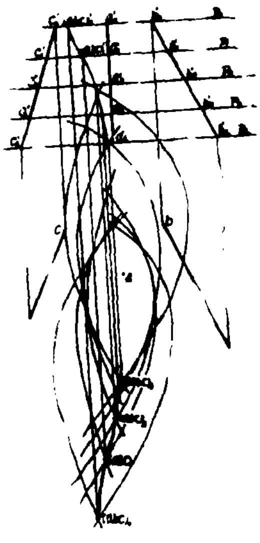

图2—6 A线上的各点与A·B·C线均相切的球心轨迹，即(ABC)$_0$ ～(ABC)$_4$。

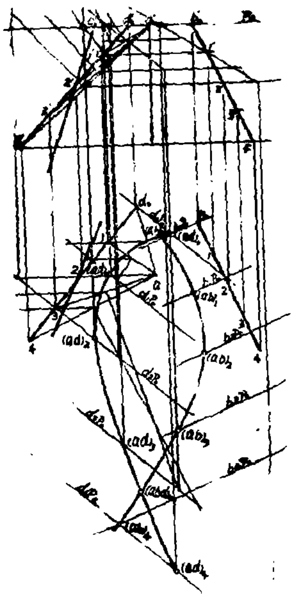

图3—1　A线上的A_0点与B・D线上各点相切的球，在p_0面上的球心轨迹。

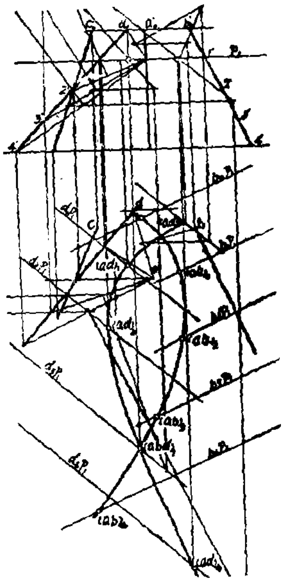

图3—2　A线上的A_1点与B・D线上各点相切的球，在p_1面上的球心轨迹。

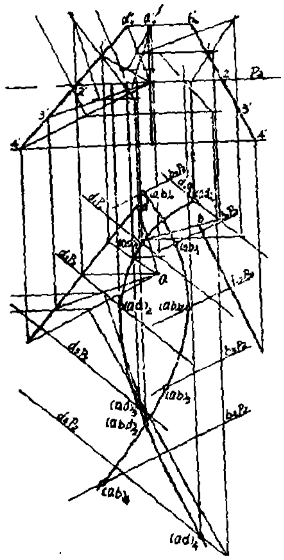

图3—3　A线上的A_2点与B・D线上各点相切的球，在p_2面上的球心轨迹。

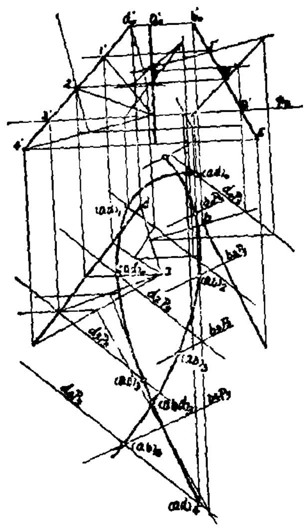

图3—4　A线上的A_3点与B・D线上各点相切的球在p_3面上的球心轨迹。

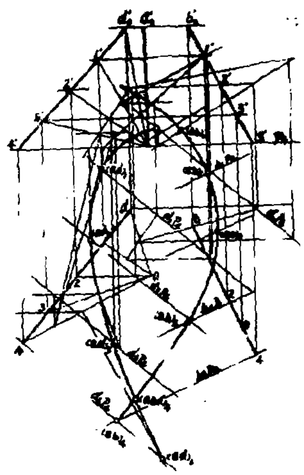

图3—5　A线上的A_4点与B・D线上各点相切的球在p_4面上的球心轨迹。

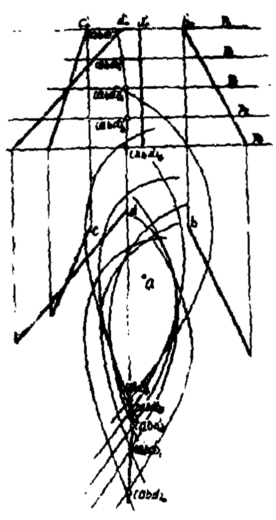

图3—6　A线上的各点（A_0～A_4）与A・B・D均相切的球心轨迹．$(ABD)_0$～$(ABD)_4$．

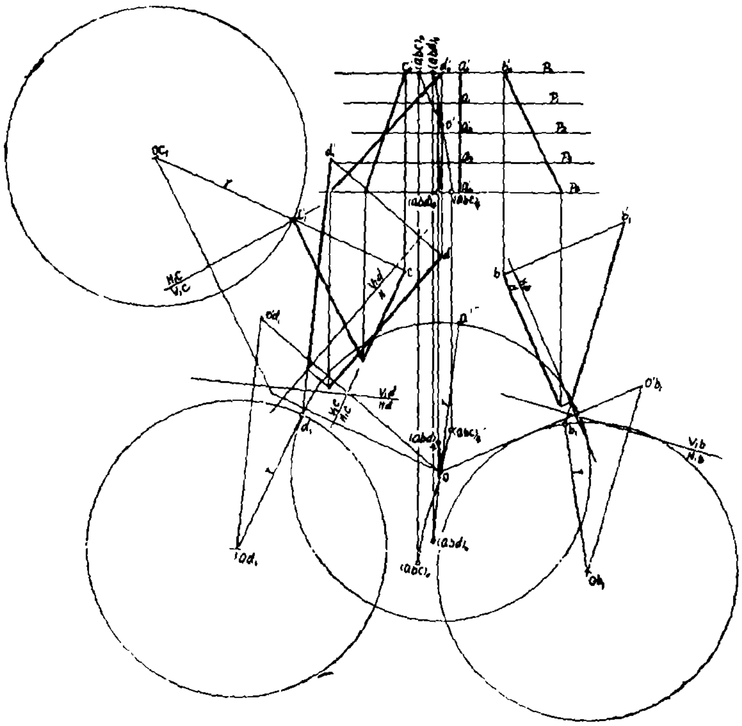

图4　与A·B·C及A·B·D异面直线分别相切的球心轨迹（ABC）$_0$～（ABC）$_4$和（ABD）$_0$～（ABD）$_4$的交点O即为与四异面直线A·B·C·D均相切的球心，及与各直线相切的实际图形和球的半径R。