华南农业大学学报 11(1)1990：50—60
J. South China Agr. Univ.

模糊最小二乘法模型

陈振权

（基础部）

提　要

本文引入模糊数间的一种距离，把类似的最小二乘法用于对模糊观测数据的分析，提出两类拟合模糊数据的模糊线性回归模型，证明确定模型的条件，给出计算模型参数的简明方法。

关键词　模糊集；模糊数；三角形模糊数；模糊数据；模糊线性回归模型

引　言

回归分析是最常用的数学方法之一，为了对观测数据进行分析，为了对未来信息作出估计，人们设计了许多非模糊的回归模型[9]。但是，当所获信息稀少、无统计意义。很不精确、定性的、语言的、或是不完全确定的信息时，普通回归模型便不再适用了，模糊回归模型被看成是拟合模糊信息、描述模糊现象较理想、较自然的方法之一。近十年来，随着处理模糊信息研究的深入，模糊回归模型的建立越来越引起科学工作者的兴趣[2][3][5][6][7][8][10][11][13]。

Yager[13]借助非模糊数据建立的模型和模糊数运算法则，对未来信息进行模糊预测。Tanaka，Uejima和Asai[10][11]从被观测值与估计值间的误差在于系统结构的不确定性出发，利用线性规划方法，引入模糊线性回归模型。Celmins[2][3]由类似最小二乘法推出了模糊回归模型。但是，就方法和运算形式而论，与普通线性回归模型较接近、较可视为古典模型的自然延伸的，要推Diamond[6]1988年发表的几类模糊线性回归模型。不过，Diamond模型有赖于模糊数间距离的选择。不幸的，模糊数集上距离的确定，也和模糊集的排序问题一样，一直是众议纷云，未获理想解决，这在Bortolan和Degani文章[1]有较详细的综述。

为拟合模糊数集上距离的多家之见，本文提出一种与参数λ（$\lambda\in[0,1]$）相联系的距离，并以此为出发点，提出与参数λ相联系的模糊线性回归模型，人们可以依目标和观点的差异取不同参数的距离，从而建立不同参数的回归模型，这正是描述事物多样性的反映。特别，当取$\lambda=1$时，就得到Diamond模型[6]，也就是说，Diamond模型是本模型的特例，而且可以证明，当数据不能确定其Diamond模型时，可适当选择别的参数建立本模型。这使本模型具有更灵活和实用优点。本文第一节是证明唯一性定理，它是本模型的理论依据，第二、三节提出两类由正三角形模糊数到三角形模糊数的线性回归模型，第四节是本文的回顾和前瞻。举有数值例子说明本模型与Diamond模型的异同。

一、唯一性定理

首先介绍一些以下涉及的基本定义。设R为实数集，R上的模糊集记X，其隶属函数记X（χ），若X满足：（Ⅰ）X的任意水平集均为凸集；（Ⅱ）X（χ）是上半连续函数；（Ⅲ）X是正规的；（Ⅵ）supp（X）是有界集，则称X是一模糊数。容易证明，模糊数的任意水平集均为闭区间。

设L，R表示定义在实数集上的两个偶函数，L（0）=R（0）=1，並且在（0，+∞）上都是非增的。设模糊数X的隶属函数取如下形式

$$X(u)=\begin{cases}L[(m-u)/a], & \text{当}u\leqslant m,\ a>0\\ R[(u-m)/b], & \text{当}u\geqslant m,\ b>0\end{cases}$$

则称X为LR型模糊数，分别称其中的m，a，b为X的均值、左展、右展、记$X=(m,a,b)_{LR}$

LR型模糊数集上的线性运算为[4]：

（Ⅰ）$(m,a,b)_{LR}+(m',a',b')_{LR}=(m+m',a+a',b+b')_{LR}$

（Ⅱ）实数$t>0$则$t(m,a,b)_{LR}=(tm,ta,tb)_{LR}$

（Ⅲ）实数$t<0$则$t(m,a,b)_{LR}=(m,-tb,-ta)_{LR}$

当L，R为如下函数

$$T(\chi)=\begin{cases}1-|\chi|, & \text{当}0\leqslant\chi\leqslant1\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

时，则称X为三角形模糊数，记$X=(m,a,b)_T$记全体三角形模糊数为$J(R)$。

设X，Y∈J（R），$X=(\chi,\underline{\xi},\overline{\xi})_T$，$Y=(y,\underline{\eta},\overline{\eta})_T$对任意λ∈〔0，1〕，易知，X与Y的λ－水平集的支集分别为$[\chi-(1-\lambda)\underline{\xi},\ \chi+(1-\lambda)\overline{\xi}]$和$[y-(1-\lambda)\underline{\eta},\ y+(1-\lambda)\overline{\eta}]$。

定义1：设X，Y∈J(R)，λ∈〔0,1〕，称X与Y关于λ的距离为$d_\lambda(X,Y)$，其中

$$d_\lambda(X,Y)^2=\{[\chi-(1-\lambda)\underline{\xi}]-[y-(1-\lambda)\underline{\eta}]\}^2+\{[\chi+(1-\lambda)\overline{\xi}]-[y+(1-\lambda)\overline{\eta}]\}^2+(\chi-y)^2, \quad (1)$$

对于相同的X，Y，当λ取值不同，$d_\lambda(X,Y)$表示不同意义的距离。λ值越大，展对d_λ的影响越小，可以设想，认为展对距离应有较大影响的人，可能取较小的λ，而无视展的重要性的，可能把λ取得更靠近1，当λ=0时，d_0就是[6]中所定义的距离。自然，在实际问题中，应允许根据具体情况，决定适当的λ值的距离，当λ取定值时，$(J(R),d_\lambda)$是一完备空间。

设P(R)是J（R）中具有非负支集的元素的全体，即$(m,a,b)_T\in P(R)$，总有$m-a>0$，称P(R)为正三角形模糊数集。容易看出，若$(m,a,b)_T\in P(R)$，则任意$t>0$，有$t(m,a,b)_T\in P(R)$，故P（R）是一锥（Cone）。并且，P(R)关于d_λ是J(R)上的一个闭凸集。

辅理1：设λ∈〔0，1〕，A，B，X∈J（R），则成立

$$d_\lambda(A,B)^2=2d_\lambda(A,X)^2+2d_\lambda(X,B)^2-4d_\lambda(X,(A+B)/2)^2$$

证：设$A=(a,\underline{\alpha},\overline{\alpha})_T$，$B=(b,\underline{\beta},\overline{\beta})_T$，$X=(\chi,\underline{\xi},\overline{\xi})_T$，由代数式$(e+f)^2$

$+(e-f)^2=2e^2+2f^2$，易见

$2(a-\chi)^2+2(\chi-b)^2=(a-b)^2+4[\chi-(a+b)/2]^2$　　(2). 又 $d_\lambda(A,X)^2$

$=[a-\chi-(1-\lambda)(\underline{\alpha}-\underline{\xi})]^2+[a-\chi+(1-\lambda)(\overline{\alpha}-\overline{\xi})]^2+(a-\chi)^2$

$d_\lambda(X,B)^2=[\chi-b-(1-\lambda)(\underline{\xi}-\underline{\beta})]^2+[\chi-b+(1-\lambda)(\overline{\xi}-\overline{\beta})]^2$

$+(\chi-b)^2$ 利用 (2) 易得

$2d_\lambda(A,X)^2+2d_\lambda(X,B)^2=d_\lambda(A,B)^2+4d_\lambda[X,(A+B)/2]^2$

定理1：设 $\lambda\in[0,1]$，C是 $P(R)$ 上一个闭锥，则对于 $P(R)$ 上任意三角形模糊数X，C中有唯一的三角形模糊数 V_0 存在，使

$$d_\lambda(X,V_0)\leqslant d_\lambda(X,V),\ \forall V\in C$$

证：若 $X\in C$，显然，$X=V_0$ 即所求。故设 $X\overline{\in}C$，令 $\delta=\inf_{V\in C}[d_\lambda(X,V)]$，则可取元素列 $\{V_i\in C\}$，使 $d_\lambda(X,V_i)\to\delta$，再由辅理1知

$d_\lambda(V_i,V_j)^2=2d_\lambda(V_i,X)^2+2d_\lambda(X,V_j)^2-4d_\lambda[X,(V_i+V_j)/2]^2$ 由C的凸性知，对所有i，j，$(V_i+V_j)/2\in C$，因此，$d_\lambda[X,(V_i+V_j)/2]\geqslant\delta$，而且

$$d_\lambda(V_i,V_j)^2\leqslant 2d_\lambda(V_i,X)^2+2d_\lambda(X,V_j)^2-4\delta^2$$

从而，当 $i,j\to\infty$ 时，$d_\lambda(V_i,V_j)\to 0$ 故 $\{V_i\}$ 是一Cauchy序列，由C的闭性知 $\lim V_i=V_0\in C$，显然

$$d_\lambda(X,V_0)<d_\lambda(X,V),\ \forall V\in C$$

设 $V_0=(v_0,\underline{\omega}_0,\overline{\omega}_0)_T$，可以证明 V_0 就是C中使下式 $(R_\lambda>0)$ 成立的唯一的元素

$R_\lambda=[(\chi-(1-\lambda)\underline{\xi}-(v_0-(1-\lambda)\underline{\omega}_0))][(v_0-(1-\lambda)\underline{\omega}_0)-(v-(1-\lambda)\underline{\omega})]+[\chi+(1-\lambda)\overline{\xi}-(v_0+(1-\lambda)\overline{\omega}_0)][v_0+(1-\lambda)\overline{\omega}]+(\chi-v_0)(v_0-v)\geqslant 0$ 其中 $V=(v,\overline{\omega},\underline{\omega})_T$ 是C中异于 V_0 的任意元素。

事实上，容易算得

$d_\lambda(X,V)^2=d_\lambda(X,V_0)^2+d_\lambda(V_0,V)^2+2R_\lambda$

因 $V\neq V_0$，$d_\lambda(V_0,V)^2>0$，$R_\lambda>0$ 故

$$d_\lambda(X,V)^2>d_\lambda(X,V_0)^2$$

推论1：设N为正整数，C′为N维模糊数向量空间 $P(R)^N$ 中的一个闭锥，在 $P(R)^N$ 上定义距离 $d_{\lambda N}$ 如下

$$d_{\lambda N}(V,W)^2=\sum_{i=1}^{N}d_\lambda(V_i,W_i)^2,\quad V,W\in P(R)^N$$

其中 $V_i,W_i\in P(R)$，$i=1,\cdots,N$ 是V，W的分量，则对于任意 $X\in P(R)^N$，C′有唯一的N维向量 V_0 存在，使

$$d_{\lambda N}(X,V_0)<d_{\lambda N}(X,V),\ \forall V\in C'$$

证：辅理1推广至 $d_{\lambda N}$ 仍然成立。再由类似定理1的方法，即可证明 V_0 的存在和唯一性。

二、（λ-F1）模 型

设已给观测数据

$$X_i=(\chi_i,\underline{\xi}_i,\overline{\xi}_i)_T,\quad Y_i=(y_i,\underline{\eta}_i,\overline{\eta}_i)_T,\quad i=1,\cdots,N \qquad (3)$$

其中$X_i\in P(R)$，$Y_i\in J(R)$。现在考虑如下$P(R)\to J(R)$函数

$$(\lambda-F_1)\qquad Y=a+b\chi,\ a,b\in R$$

关于d_λ，对数据（3）的最优拟合。以距离d_λ表由数据引起的误差，类似普通最小二乘法，这里的最优拟合便化为如下的求最小值问题（M1）

$$(\text{M1})\qquad \min_{a,b} r(a,b)=\Sigma d_\lambda(a+bX_i,Y_i)^2$$

先说明以下使用的一些符号：设$X_i=(x_i,\underline{\xi}_i,\overline{\xi}_i)_T$，记$\delta(X_i)=\overline{\xi}_i-\underline{\xi}_i$，$\hat{\underline{\xi}}=\Sigma\underline{\xi}_i/N$，$\hat{\overline{\xi}}=\Sigma\overline{\xi}_i/N$，$\hat{\chi}=\Sigma\chi_i/N$，$\delta(\hat{X})=\Sigma\delta(X_i)/N$，其中$\Sigma=\sum\limits_{1}^{N}$。对于其他三角形模糊数也有类似的符号。

求解（M1）问题，分$b\geqslant 0$和$b<0$两种情形讨论。若$b\geqslant 0$，由定义1知

$$d_\lambda(a+bX_i,Y_i)^2=[a+b\chi_i-y_i-(1-\lambda)(b\underline{\xi}_i-\underline{\eta}_i)]^2+[a+b\chi_i-y_i+(1-\lambda)(b\overline{\xi}_i-\overline{\eta}_i)]^2+(a+b\chi_i-y_i)^2$$

若$b<0$，因$a+bX_i=(a+b\chi_i,\ -b\overline{\xi}_i,\ -b\underline{\xi}_i)_T$故

$$d_\lambda(a+bX_i,Y_i)^2=[a+b\chi_i-y_i+(1-\lambda)(b\overline{\xi}_i+\underline{\eta}_i)]^2+[a+b\chi_i-y_i-(1-\lambda)(b\underline{\xi}_i+\overline{\eta}_i)]^2+(a+b\chi_i-y_i)^2$$

因此，当$b\geqslant 0$，若（M1）有解，则其解a_+，b_+满足方程组（S_+）：$\frac{\partial r}{\partial a}=0$，$\frac{\partial r}{\partial b}=0$，即

$$(S_+)\begin{cases}3a+b[3\hat{\chi}+(1-\lambda)\delta(\hat{X})]=3\hat{y}+(1-\lambda)\delta(\hat{y}) & (4)\\ a\Sigma[3\chi_i+(1-\lambda)\delta(X_i)]+b\Sigma\{\chi_i^2+[\chi_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i]^2+[\chi_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i]^2\}\\ \quad=\Sigma\{[\chi_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i][y_i-(1-\lambda)\underline{\eta}_i]+[\chi_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i][y_i+(1-\lambda)\overline{\eta}_i]+\chi_iy_i\}, & (5)\end{cases}$$

当$b<0$，若（M1）有解，则其解a_-，b_-满足方程组（S_-）：$\frac{\partial r}{\partial a}=0$，$\frac{\partial r}{\partial b}=0$，即

$$(S_-)\begin{cases}3a+b[3\hat{\chi}+(1-\lambda)\delta(\hat{X})]=3\hat{y}+(1-\lambda)\delta(\hat{y}) & (4)\\ a\Sigma[3\chi_i+(1-\lambda)\delta(X_i)]+b\Sigma\{\chi_i^2+[\chi_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i]^2+[\chi_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i]^2\}\\ \quad=\Sigma\{[\chi_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i][y_i-(1-\lambda)\underline{\eta}_i]+[\chi_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i][y_i+(1-\lambda)\overline{\eta}_i]+\chi_iy_i\}, & (6)\end{cases}$$

在解（M1）时，先由数据（3）求出以下常数，记

$$B=9\Sigma(\chi_i-\hat{\chi})(y_i-\hat{y})$$

$D=3\Sigma\{(y_i-\hat{y})[\delta(X_i)-\delta(\hat{X})]+(x_i-\hat{x})[\delta(Y_i)-\delta(\hat{Y})]\}$

$G=\Sigma\{[\delta(\hat{X})_i-\delta(\hat{X})][\delta(Y_i)-\delta(\hat{Y})]+2\delta(X_i)\delta(Y_i)\}$

$E=3\Sigma(\underline{\xi}_i\eta_i\ \ \overline{\xi}_i\eta_i)$

$F=-3\Sigma(\overline{\xi}_i\overline{\eta}_i+\underline{\xi}_i\underline{\eta}_i)$

$T_\lambda=3\Sigma\{x_i^2+[x_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i]^2+[x_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i]^2\}-\Sigma[3x_i+(1-\lambda)\delta(X_i)][3\hat{X}+(1-\lambda)\delta(\hat{X})]$

定理2：设$B>0$，令

$M=\{\lambda\in[0,1]:B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+F)>0\}$

对$\lambda\in M$，令

$b_{\lambda+}=[B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+E)]/T_\lambda$

把$b_{\lambda+}$代入（4）求出$a_{\lambda+}$，则$a_{\lambda+}$，$b_{\lambda+}$是（M1）的唯一解，从而（λ－F1）由$a_{\lambda+}$，$b_{\lambda+}$唯一确定。

证：因$B>0$，当λ充分大，$\lambda\in[0,1]$，总有

$$B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+F)>0$$

故M不空，以3乘（5）与（4）消去3a，容易由（S_+）解得

$$T_\lambda b_{\lambda+}=B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+E) \quad (7)$$

类似地，由（S_-）可解得

$$T_\lambda b_{\lambda-}=B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+F) \quad (8)$$

故 $T_\lambda(b_{\lambda+}-b_{\lambda-})=(1-\lambda)^2(E-F)$

$$=(1-\lambda)^2 3\Sigma(\underline{\xi}_i+\overline{\xi}_i)(\underline{\eta}_i+\overline{\eta}_i)\geqslant 0$$

还可以证明：$T_\lambda>0$，实际上，容易把T_λ化为

$T_\lambda=\Sigma\{[3(x_i-\hat{x})+(1-\lambda)\delta(X_i)-(1-\lambda)\delta(\hat{X})]^2+2(1-\lambda)^2[\underline{\xi}_i^2+\overline{\xi}_i^2+\underline{\xi}_i\overline{\xi}_i]\}>0$

因此，对任意非退化数据和$\lambda\in[0,1]$总有$b_{\lambda+}\geqslant b_{\lambda-}$

现在证明定理结论，由$B>0$，$\lambda\in M$和M的含义知$T_\lambda b_{\lambda-}>0$，因$T_\lambda>0$故$b_{\lambda-}>0$，即$b_{\lambda+}\geqslant b_{\lambda-}>0$，然而$b_{\lambda-}>0$，说明（$S_-$）不必考虑，$b_{\lambda+}>0$，说明（$S_+$）成立，故$a_{\lambda+}$，$b_{\lambda+}$是（M1）的解。

又设C为$P(R)^N$中的N维模糊数向量$(1,1,\cdots,1)'=I$和$(X_1,X_2,\cdots,X_N)'=X$所生成的锥$\{aI+bX:a,b>0\}$（若$a_{\lambda+}$为负则C为$\{-aI+bX:a,b>0\}$，其中$1=(1,0,0)_T$，由定理1推论知：C中存在唯一的向量使$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_N)'$到C的距离在该向量上达到最小值，故$a_{\lambda+}$，$b_{\lambda+}$是（M1）的唯一解。

定理3：设$B<0$，$N=\{\lambda\in[0,1]:B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+E)<0\}$对$\lambda\in N$，令

$$b_{\lambda-}=[B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+F)]/T_\lambda$$

把$b_{\lambda-}$代入（4）求$a_{\lambda-}$，则$a_{\lambda-}$，$b_{\lambda-}$是（M1）的唯一解，从而模型（$\lambda-F_1$）由$a_{\lambda-}$，$a_{\lambda-}$唯一确定。

证：因$B<0$，$\lim_{\lambda\to 1-0}(B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+E))=B$，故$N$不空，再由（7）和$N$的含义知$T_\lambda b_{\lambda+}<0$，又因$T_\lambda>0$，故$b_{\lambda+}<0$，又由定理2的证明知$b_{\lambda-}\leqslant b_{\lambda+}<0$，然而，$b_{\lambda+}<0$说明（$S_+$）不必考虑，$b_{\lambda-}<0$说明（$S_-$）成立，故由（$S_-$）解出$a_{\lambda-}$，$b_{\lambda-}$是（M1）的解。

由定理1的推论1知，锥｛$a-bX$：$a>0$，$b>0$｝上有唯一的向量使$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_N)'$到此锥上距离达到最小值，故$a_{\lambda-}$，$b_{\lambda-}$就是（M1）的唯一解。

当上述方法能确定（$\lambda-F_1$）模型时，我们称此模型存在。Diamond模型(F_1)[6]是（$0-F_1$）模型。

推论1：（i）若$B>0$，$D>0$，且$D+2(G+F)>0$或（ii）若$B<0$，$D<0$，$D+2(G+E)<0$，则任意$\lambda\in[0,1]$，模型（$\lambda-F_1$）存在。

事实上，考虑函数$y=B+D\chi+(G+F)\chi^2$，$\chi\in[0,1]$，在条件（i）下，函数恒正，而$y=B+D\chi+(G+E)\chi^2$，$\chi\in[0,1]$，在条件（ii）下，函数恒负。

推论2：若（$0-F_1$）不存在，仍可选取适当的λ值(即$\lambda\in M$或$\lambda\in N$)使（$\lambda-F_1$）存在。

例1：设$X_1=(1,0.75,0.75)_T$，$X_2=(2,1,1)_T$，$X_3=(3,1,1)_T$，$Y_1=(1,0.75,0.75)_T$，$Y_2=(1.875,1.5,1.5)_T$，$Y_3=(3.25,1.5,1.5)_T$，这是[6]中举出不能确定（$0-F_2$）模型例子，这里按定理1 $B=81/4$，$D=0$，$G=0$，$E=171/8$，$F=-171/8$。由此求出$\lambda^*=0.795$，当$\lambda\geqslant\lambda^*$时，其（$\lambda-F_1$）为$Y=a_\lambda+b_\lambda X$

其中

$$b_\lambda=\frac{20.25+21.375(1-\lambda)^2}{18+15.375(1-\lambda)^2}\qquad a_\lambda=2.041-3b_\lambda$$

例如$\lambda=0.5$则 $Y=-1.47+1.17X$

三、（$\lambda-F_2$）模型

考虑$P(R)\to J(R)$函数

（$\lambda-F_2$） $Y=E+bX$，$b\in R$，$E\in J(R)$

关于d_λ对（3）的最优拟合，当E为实数时，模型（$\lambda-F_2$）即（$\lambda-F_1$）。这里仅讨论E为对称的三角形模糊数情形，即$E=(C,r,r,)_T$，最优拟合对应以下距离平方和最小值问题。

$$\text{(M2)}\qquad \underset{E,b}{\mathrm{Min}}\,p(E,b)=\sum d_\lambda(E+bX_i,Y_i)^2$$

当$b\geqslant 0$，$E+bX_i=(c+bx_i,\ r+b\underline{\xi}_i,\ r+b\overline{\xi}_i)_T$故

$d_\lambda(E+bX_i,Y_i)^2=[C+b\chi_i-y_i-(1-\lambda)(r+b\underline{\xi}_i-\overline{\eta}_i,)]^2+[c+b\chi_i-y_i+(1-\lambda)(r+b\overline{\xi}_i-\overline{\eta}_i)]^2+(c+b\chi_i-y_i)^2$

（M2）归结为求$\frac{\partial p}{\partial c}=0$，$\frac{\partial p}{\partial r}=0$，$\frac{\partial p}{\partial b}=0$，即（$S_+'$）。

$$(S'_+)\begin{cases}3c+b[3\hat{x}+(1-\lambda)\delta(\hat{X})]=3\hat{y}+(1-\lambda)\delta(\hat{Y}) & (9)\\ 2r=\hat{\underline{\eta}}+\hat{\overline{\eta}}-b(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\overline{\xi}}) & (10)\\ NC[3\hat{x}+(1-\lambda)\delta(\hat{X})]+N(1-\lambda)^2r(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\overline{\xi}})+b\sum\{[x_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i]^2+[x_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i]^2+x_i^2\}=\sum\{[x_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i][y_i-(1-\lambda)\underline{\eta}_i]+[x_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i][y_i+(1-\lambda)\overline{\eta}_i]+x_iy_i\} & (11)\end{cases}$$

当$b<0$，$E+bX_i=(c+bx_i,\ r-b\overline{\xi}_i,\ r-b\underline{\xi}_i)_T$故

$$d_\lambda(E+bX_i,Y_i)^2=[c+bx_i-y_i-(1-\lambda)(r-b\overline{\xi}_i-\underline{\eta}_i)]^2+[c+bx_i-y_i+(1-\lambda)(r-b\underline{\xi}_i-\overline{\eta}_i)]^2+(c+bx_i-y_i)^2$$

(M2)归结为求$\frac{\partial p}{\partial c}=0$，$\frac{\partial p}{\partial r}=0$，$\frac{\partial p}{\partial b}=0$，即$(S'_-)$。

$$(S'_-)\begin{cases}3c+b[3\hat{x}+(1-\lambda)\delta(\hat{X})]=3\hat{y}+(1-\lambda)\delta(\hat{Y}) & (9)\\ 2r=\hat{\overline{\eta}}+\hat{\underline{\eta}}+b(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\overline{\xi}}) & (12)\\ NC[3\hat{x}+(1-\lambda)\delta(\hat{X})]-N(1-\lambda)^2r(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\overline{\xi}})+b\sum\{[x_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i]^2+[x_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i]^2+x_i^2\}=\sum\{[x_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i][y_i+(1-\lambda)\overline{\eta}_i]+[x_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i][y_i-(1-\lambda)\underline{\eta}_i]+x_iy_i\} & (13)\end{cases}$$

又设

$$B'=18\sum(x_i-\hat{x})(y_i-\hat{y})$$

$$D'=6\sum\{(y_i-\hat{y})[\delta(X_i)-\delta(\hat{X})]+(x_i-\hat{x})[\delta(Y_i)-\delta(\hat{Y})]\}$$

$$G'=\sum\{2[\delta(X_i)-\delta(\hat{X})][\delta(Y_i)-\delta(\hat{Y})]+\delta(X_i)\delta(Y_i)\}$$

$$E'=3\sum[(\overline{\xi}_i-\hat{\overline{\xi}})(\underline{\eta}_i-\hat{\underline{\eta}})+(\underline{\xi}_i-\hat{\underline{\xi}})(\overline{\eta}_i-\hat{\overline{\eta}})+(\underline{\xi}_i-\hat{\underline{\xi}})\underline{\eta}_i+(\overline{\xi}_i-\hat{\overline{\xi}})\overline{\eta}_i]$$

$$T'_\lambda=6\sum\{[x_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i]^2+[x_i+(1-\lambda)\overline{\xi}_i]^2+x_i^2\}-2N[3\hat{x}+(1-\lambda)\delta(\hat{X})]^2-3N((1-\lambda)^2(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\overline{\xi}})^2$$

$$=6\sum\{[x_i-\hat{x}+(1-\lambda)\delta(X_i)-(1-\lambda)\delta(\hat{X})]^2+2(x_i-\hat{x})^2+2(\underline{\xi}_i-\hat{\underline{\xi}})(\overline{\xi}_i-\hat{\overline{\xi}})\}+N\delta(\hat{X})^2$$

定理4：设$B'>0$，令$\lambda\in[0,1]$，且

$m'=\{\lambda: B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'+E')>0\}\cap\{\lambda: B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'-E')>0\}$ 对$\lambda\in m'$，令

$$b_\lambda=[B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'+E')]/T'_\lambda$$

若$b_{\lambda+}(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\bar{\xi}})<\hat{\underline{\eta}}+\hat{\bar{\eta}}$，把$b_{\lambda+}$代入（9），（10），解出c，r。记$E_{\lambda+}=(C, r, r)_T$，则$E_{\lambda+}$，$b_{\lambda+}$是（M2）的唯一解，从而$E_{\lambda+}$，$b_{\lambda+}$唯一确定（λ－F2）。

证：因$B'>0$，当λ充分大时，有$\lambda\in m'$故m'不空。 对$\lambda\in[0, 1]$，以6乘（11），再由（9），（10）消去3c，2r解出b，记其为$b_{\lambda+}$，容易证明

$$T'_\lambda b_{\lambda-}=B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'+E') \tag{14}$$

用类似方法从（S'－）解出b，记其为$b_{\lambda-}$，易见

$$T'_\lambda b_{\lambda+}=B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'-E') \tag{15}$$

还可以证明$T'_\lambda>0$，事实上，考虑实值数据集：W_i，Z_i，$i=1, 2\cdots, 3N$，其中当$i=1, 2, \cdots, N$，$W_i=y_i-(1-\lambda)\underline{\eta}_i$，$Z_i=\chi_i-(1-\lambda)\underline{\xi}_i$；当$i=N+1, \cdots, 2N$，$W_i=y_i$，$Z_i=\chi_i$；当$i=2N+1, \cdots, 3N$，$W_i=y_i+(1-\lambda)\bar{\eta}_i$，$Z_i=\chi_i+(1-\lambda)\bar{\xi}_i$。显然，（$S'_+$）的方程（9），（10），（11）是上述数据按古典方法配函数$W=C+ru+bZ$所对应的正规方程，其中u是一特征变量：当$i=1, 2, \cdots, N$，$u_i=-1$；当$i=N+1, \cdots, 2N$，$u_i=0$；当$i=2N+1, \cdots, 3N$，$u_i=1$；故$T'_\lambda>0$

当$\lambda\in m'$，由（14）、（15）和m'的含义知$T'_\lambda b_{\lambda+}>0$，$T'_\lambda b_{\lambda-}>0$，再由$T'_\lambda>0$知$b_{\lambda+}>0$，$b_{\lambda-}>0$，然而$b_{\lambda-}>0$说明原设（$S'_-$）不成立，$b_{\lambda+}>0$说明（$S'_+$）成立，又因$b_{\lambda+}(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\bar{\xi}})<\hat{\underline{\eta}}+\hat{\bar{\eta}}$和（10）知$r_\lambda>0$，即$E_{\lambda+}=(C_\lambda, r_\lambda, r_\lambda)_T$是三角形模糊数，故$E_{\lambda+}$，$b_{\lambda+}$是（$M_2$）的解。

设C'是$P(R)^N$中一锥$\{A+bX: b>0, A=(E, E\cdots, E)'\}$，其中E为对称三角形模糊数，$X=(X_1X_2,\cdots X_N)'$，由定理1的推论1知，如C'上有向量$A^*+b^*X$使由$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_N)'$到C'上距离达到最小，则它是唯一的，故$E_{\lambda+}$，$b_{\lambda+}$是（$M_2$）的唯一解。

定理5：设$B'<0$，$\lambda\in[0, 1]$，并且设

$N'=\{\lambda: B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'+E')<0\}\cap\{\lambda: B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'-E')<0\}$ 对$\lambda\in N'$，令

$$b_{\lambda-}=\frac{B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'-E')}{T'_\lambda}$$

若$-b_{\lambda-}(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\bar{\xi}}<\hat{\underline{\eta}}+\hat{\bar{\eta}}$，把$b_{\lambda-}$代入（9）、（12）求出C，r，记$E_{\lambda-}=(C, r, r)_T$，则$E_{\lambda-}$，$b_{\lambda-}$是（M2）的唯一解。

证：当$\lambda\to1-0$时$B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'+E')\to B'$，$B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'-E')\to B'$，因$B'<0$，故N'不空，当$\lambda\in N'$，由（14），（15）及N'的含义知$T'_\lambda b_{\lambda+}<0$，$T'b_{\lambda-}<0$。再由$T'_\lambda>0$知$b_{\lambda+}<0$，$b_{\lambda-}<0$，但$b_{\lambda+}<0$说明原设（$S_+'$）不成立，$b_{\lambda-}<0$，说明（$S_-'$）成立，又由（12）和$-b_{\lambda-}(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\bar{\xi}})<\hat{\underline{\eta}}+\hat{\bar{\eta}}$知$r>0$，即$E_{\lambda-}=(C, r, r)_T$是三角形模糊数，故$E_{\lambda-}$，$b_{\lambda-}$是（M2）的解

再考虑$P(R)^N$中的锥 $\{A-bX: A=(E, \cdots, E)', b>0\}$，由定理1的推论1知，锥上有唯一的向量使$(Y_1, \cdots, Y_N)'$到锥上距离达最小值，故$E_{\lambda-}$，$b_{\lambda-}$是（M2）的唯一解，从而模型（$\lambda-F_2$）由$E_{\lambda-}'$，$b_{\lambda-}$唯一确定。

推论1：若$\lambda=0$时（$0-F_2$）不存在，则仍可适当选取$0<\lambda<1$使（$\lambda-F_2$）存在。

Diamond[6]建立了（$0-F_2$）模型，但他的（$0-F_2$）模型要求数据必需是紧凑的（Coherent），即要求满足如下条件

$$\Sigma\left[\left(\underline{\xi}_i+\overline{\xi}_i\right)-\left(\widehat{\underline{\xi}}+\widehat{\overline{\xi}}\right)\right]\left[\left(\underline{\eta}_i+\overline{\eta}_i\right)-\left(\widehat{\underline{\eta}}+\widehat{\overline{\eta}}\right)\right]>0$$

这使他的定理3[6]有很大局限性，除未能排除$r<0$的情况外，这个条件只能建立$b_+\geqslant b_-$的模型，本文定理4、5除能建立$b_+\geqslant b_-$的（$0-F_2$）模型外，也可以建立$b_-\geqslant b_+$的（$0-F2$）模型。

例2：设观测数据如表1

表1 观测数据表

$X_i=(x_i, \underline{\xi}_i, \overline{\xi}_i)_T$	$Y_i=(y_i, \underline{\eta}_i, \overline{\eta}_i)_T$
(21, 4.2, 2.1)	(4, 0.6, 0.2)
(15, 2.25, 2.25)	(3, 1.2, 0.4)
(15, 1.5, 2.25)	(3.5, 1.2, 1.2)
(9, 1.35, 1.35)	(2, 0.8, 1)
(12, 1.2, 1.2)	(3, 0.8, 2.1)
(18, 3.6, 1.8)	(3.5, 0.8, 0.6)
(6, 0.6, 1.2)	(2.5, 1.2, 0.8)
(12, 1.8, 2.4)	(2.5, 0.5, 0.5)

经计算得$\Sigma\left[\left(\underline{\xi}_i+\overline{\xi}_i\right)-\left(\widehat{\underline{\xi}}+\widehat{\overline{\xi}}\right)\right]\left[\left(\underline{\eta}_i+\overline{\eta}_i\right)-\left(\widehat{\underline{\eta}}+\widehat{\overline{\eta}}\right)\right]=-5.529<0$

故此数据非紧凑的，这里我们按定理4先求出

$B'=351$，$D'=-49.05$

$G'=2.73$，$E'=-16.58$

$T'_\lambda=2916-337.5(1-\lambda)+75.58(1-\lambda)^2$。易得$m'=[0, 1]$，

即任意$\lambda\in[0, 1]$，$b_{\lambda+}>0$，$b_{\lambda-}>0$，于是

$$b_{\lambda+}=[351-49.05(1-\lambda)-14.3(1-\lambda)^2]/[2916-337.5(1-\lambda)+75.58(1-\lambda)^2]$$

$$3C=9-0.037(1-\lambda)-b_{\lambda+}[40.5-0.243(1-\lambda)^2]$$

$$2r=1.737-3.88b_{\lambda+}, \quad \left(\because b_{\lambda+}\left(\widehat{\underline{\xi}}+\widehat{\overline{\xi}}\right)\leqslant\widehat{\underline{\eta}}+\widehat{\overline{\eta}}\right)$$

故（$\lambda-F_2$）模型为

$$Y=E_{\lambda+}+b_{\lambda+}X, \quad E_{\lambda+}=(c, r, r)_T$$

特别，当$\lambda=0$模型成立，（$0-F_2$）为

$$Y=(4.57, 1.31, 1.31)_T+0.109X$$

四、结 论

本文从引入模糊数间距离的新定义出发，利用类似的最小二乘法，提出了两类拟合模糊数据的线性回归模型，方法以唯一性定理："在N维模数向量空间的任一闭锥上，使空间到锥上距离最小的向量是唯一存在的"为依据，严格证明各模型的确定条件，计算步骤

简单明确，便于实际应用。

使用模型，应根据问题特性选择参数，要明确建模的出发点，可以使用不同参数进行模型对比，再择合适者用之，避免建模之僵化。

Diamond 的（0－F1）和（0－F2）是本模型的特殊情形，或者说本模型是广义的Diamond模型，它的特点在于能概括多种模型，当数据不能确定其(0－F1)或（0－F2）模型时，可以另选参数确定另外参数的模型，这是描述事物多样性的反映。

本模型的建模条件较宽，计算模型简单明确，基本由B（或B′）的符号判断建模途径，便于实际应用。

在对方法稍作修改后，可以把模型应用范围扩大到梯形模糊数集上，模型（λ－F2）是把模型（λ－F1）的系数a扩展至J(R）上，但若想把（λ－F1）的系数b也扩展至J（R）上是不可能的，因为这时的bX不一定是三角形模糊数，从而三角形模糊数据（X_i，Y_i）无法拟合。

引 用 文 献

〔1〕 G.Bortolan and R.Degani, A review of some methods for ranking fuzzy subsets,Fuzzy Sets and Systems,1985,15,1-19

〔2〕 A.Celmins,Least squares model fitting to fuzzy vector data, Fuzzy Sets and Systems, 1987,22 245-269

〔3〕 A.Celmins,Multidimensional least squares fitting of fuzzy models. Math. Modelling, 1987,Vol.9,NO.9,669-690

〔4〕 D.Dubois and H.prade,Fuzzy sets and Systems:Theory and Applications, Academic, New York,1980,53-55

〔5〕 D.Dubois and H.Prade.Additions of interactive fuzzy numbers, IEEE Trans. Automat.Central AC-26:926-936,(1981)

〔6〕 P.Diamond,Fuzzy least squares,Inform.Sci.1988,64:141-157

〔7〕 K.Jaiuga,Linear Fuzzy Regression,Fuzzy Sets and Systems,20,1986,343-353

〔8〕 B.Heshmaty and A.Kandel,Fuzzy linear regression and its applications to forecasting in uncertain environments, Fuzzy Sets and Systems,1985,15,159-191

〔9〕 R.H.Myers, Classical and Modern Regression with applications, DUXBRY,BOSTON, 1986,101-126

〔10〕 H.Tanaka, S.Uejima and K.Asai,Linear regression analysis with fuzzy model, IEEE Trans.Syst.Man Cybernet.1982 12,903-907

〔11〕 H,Tanaka et al.,Linear regression analysis with fuzzy model, IEEE Trans. Systems Man Cybernet.1984,SMC-14,325-328

〔12〕 H.Tanaka,Fuzzy data analysis by possiblistic linear models, Fuzzy Sets and Systems, 1987,24,363-375

〔13〕 R.Ryager,Fuzzy prediction based on regression models, Inform. Sci.1982, 26, 45-63

〔14〕 L.A.Zadeh,The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning,Inform.Sci.1975,8,199-244

LEAST SQUARES MODELS FITTING TO FUZZY DATA

Chen Zhenquan

(Department of Basic Courses

Abstract

Tow fuzzy linear regression models are proposed for data analysis of triangular fuzzy numbers using analogues of simply linear least squares with a new metric on J (R). (Let J (R) denote the set of triangular fuzzy numbers and P(R) be that subspace of J(R) all of whose elements have nonnegative support) .The methods are rigorously justified by theorems 1 to 5.Simple algebraic criteria are given in terms of the data for when it is or is not appropriate to fit a model to a given data set.

Definition 1: If $X,Y \in J(R)$, $\lambda \in [0,1]$, the metric on $J(R)$ is deffined by $d_\lambda(X,Y)$, where

$$d_\lambda(X,Y)^2 = [x-y-(1-\lambda)(\underline{\xi}-\underline{\eta})]^2 + [x-y+(1-\lambda)(\overline{\xi}-\overline{\eta})]^2 + (x-y)^2$$

THEOREM 1: Let C be a closed cone in P(R). For any X in P(R) there is a unique triangular fuzzy number Vo in C such that

$$d_\lambda(X, V_0) < d_\lambda(X,V), \text{ for all } V \text{ in } C.$$

THEOREM 2: If $B>0$, let $m=\{\lambda \in [0, 1] : B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+F) > 0\}$ for $\lambda \in m$, let

$$b_{\lambda+} = [B+(1-\lambda)E+(1-\lambda)^2(G+E)]/T_\lambda$$

and use (4) to get $a_{\lambda+}$. Then the model (λ-F1) fitting problem has a unique solution $a_{\lambda+}$ and $b_{\lambda+}$.

THEOREM 3: If $B<0$, let $N=\{[0,1] : B+(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+E)<0\}$, for $\lambda \in N$, let

$$b_{\lambda-} = [B(1-\lambda)D+(1-\lambda)^2(G+F)]/T_\lambda$$

and use (4) to get $a_{\lambda-}$. Then the model (λ-F1) fitting problem has a unique solution $a_{\lambda-}$ and $b_{\lambda-}$.

THEOREM 4: If $B'>0, \lambda \in [0,1)$

$m'=\{\lambda : B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'+E')>0\} \cap \{\lambda : B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'-E')>0\}$, for $\lambda \in m'$, let

$$b_{\lambda-} = [B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'+E')]/T_\lambda$$

and if $b_{\lambda+}(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\overline{\xi}}) \leq \hat{\underline{\eta}}+\hat{\overline{\eta}}$, use (9), (10) to solve c, r, to get $E_{\lambda+} = (c, r, r)_T$. Then the model ($\lambda$-F2) fitting problem has unique solution $E_{\lambda+}$, $b_{\lambda+}$

THEOREL 5: If $B'<0$, $\lambda \in [0, 1]$

$N'=\{\lambda : B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'+E')<0\} \cap \{\lambda : B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'-E')<0\}$, for $\lambda \in N$, let

$$b_{\lambda-} = [B'+(1-\lambda)D'+(1-\lambda)^2(G'-E')]/T_\lambda$$

and if $-b_{\lambda-}(\hat{\underline{\xi}}+\hat{\overline{\xi}}) \leq \hat{\underline{\eta}}+\hat{\overline{\eta}}$, use(9), (12) to solve c, r, to get $E_{\lambda-}=(c, r, r)_T$. Then the model (λ-F2) fitting problem has unique solution $E_{\lambda-}, b_{\lambda-}$.

Key words: Fuzzy set; Fuzzy number; Fuzzy data; Triangular fuzzy number; Fuzzy linear regression model.