华南农业大学学报 13 (3) 1992，88～92
J. South China Agr. Univ.

一种设计空间机构的代数方法*

李德威
（农业工程系）

摘要 本文介绍了对偶数和四元数代数，并指出它在空间机构和机器人设计中的重要意义。文中以空间 RCPRC 五杆机构的位形计算为实例，推导出计算公式并算出了相应结果。

关键词 空间机构；对偶数；四元数

空间机构的设计远比平面机构复杂，这是它至今应用不多的主要原因。在空间机构和机器人设计中，由于要计算大量的空间多边形的几何关系，因而使设计工作变得十分困难。对偶数和四元数代数可以成为解决这一困难的强有力工具，它能把复杂的空间几何问题转化为代数问题予以处理，从而为空间机构和机器人的设计工作开出一条途径。

1 基本理论综述

对偶数是 W. K. Clifford 于1873年所提出，F. M. Dimentberg[1]，J. Denavit[2]和 A. T. Yang[3]等人在理论的建立和应用方面做了大量的工作。其基本理论如下：

对偶数是由一对有序实数 a 和 a_0 组成，记为 $\hat{a}$。

$$\hat{a}=a+\in a_0 \tag{1}$$

a 称为对偶数 $\hat{a}$ 的原部，a_0 称为对偶数 $\hat{a}$ 的对偶部。$\in$ 是对偶标记。定义 $\in^2=\in^3=\cdots\cdots=0$。

如果 $a=a_0=0$，则对偶数 $\hat{a}=0$，反之亦然。

如果两个对偶数的原部和对偶部分别相等，则此两对偶数相等。

两个对偶数的和为：

$$\hat{a}+\hat{b}=(a+\in a_0)+(b+\in b_0)=(a+b)+\in(a_0+b_0) \tag{2}$$

两个对偶数的积定义为它们的并乘，为：

$$\hat{a}\hat{b}=ab+\in(a_0b+b_0a) \tag{3}$$

对偶数相除，规定相除的结果应使分母为实数。因此，对偶数不能除以纯对偶数。两个对偶数的商为：

$$\hat{a}/\hat{b}=a+\in a_0/b+\in b_0=a/b+\in(a_0b-b_0a)/b^2 \tag{4}$$

对偶数的 n 次幂为：$(\hat{a})^n=a^n+\in na_0a^{n-1}$ (5)

这里，n 为任意实数。

把对偶数展开为泰勒级数，其展开式为：

$$f(\hat{a})=f(a+\in a_0)=f(a)+\in a_0\cdot df(a)/da \tag{6}$$

W. R. Hamilton 在1843年延拓矢量代数概念而提出了四元数。一个四元数有如下形式：

$$q=d+ai+bj+ck \tag{7}$$

1991-09-07收稿

这里，实数d、a、b、c是四元数$\hat{q}$的四个分量，$\underline{i}$、$\underline{j}$、$\underline{k}$是基。一个四元数$\hat{q}$由一个标量d和一个矢量$a\underline{i}+b\underline{j}+c\underline{k}$所组成。只有这两部分都相等，两个四元数才相等。对于$\underline{i}$、$\underline{j}$、$\underline{k}$有如下定义：

$$\underline{i}^2=\underline{j}^2=\underline{k}^2=-1 \tag{8}$$

$$\underline{i}\,\underline{j}=\underline{k} \qquad \underline{j}\,\underline{k}=\underline{i} \qquad \underline{k}\,\underline{i}=\underline{j} \tag{9}$$

$$\underline{j}\,\underline{i}=-\underline{k} \qquad \underline{k}\,\underline{j}=-\underline{i} \qquad \underline{i}\,\underline{k}=-\underline{j} \tag{10}$$

四元数$\hat{q}$的模为：

$$|\hat{q}|=d^2+a^2+b^2+c^2 \tag{11}$$

E. Study在1901年提出对偶角的概念，它可以方便地用来表示空间两异面直线的相对位置。如图1，两单位矢量$\underline{S}i$和$\underline{S}j$的相对位置可用参数a_{ij}和α_{ij}来表示，a_{ij}是S_i和S_j的公法线长度，α_{ij}是绕矢量a_{ij}并按右手螺旋方向为正向度量的角度。a_{ij}和α_{ij}组成对偶角$\hat{\alpha}_{ij}$：

$$\hat{\alpha}_{ij}=\alpha_{ij}+\in a_{ij} \tag{12}$$

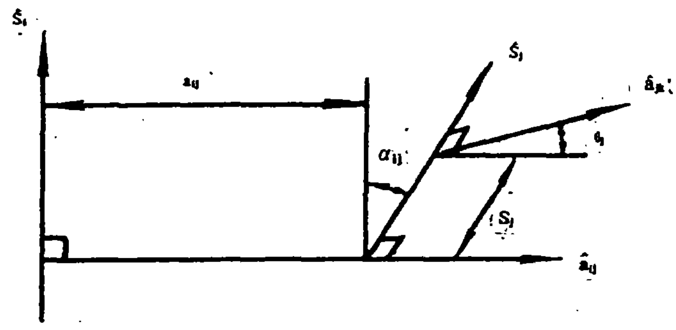

图1

另外两单位矢量a_{ij}和a_{jk}的相对位置则用$\hat{\theta}_j$表示：

$$\hat{\theta}_j=\theta_j+\in S_j \tag{13}$$

S_j表示偏距的长度，θ_j表示$\underline{a}_{ij}$和$\underline{a}_{jk}$的夹角。

根据泰勒公式可以导出下列结果：

$$\begin{cases}\sin\hat{\theta}=\sin\theta+\in S\cos\theta\\ \cos\hat{\theta}=\cos\theta-\in S\sin\theta\\ \mathrm{tg}\hat{\theta}=\mathrm{tg}\theta+\in S\sec^2\theta\end{cases} \tag{14}$$

进一步可以导出对偶角有下列三角函数关系：

$$\begin{cases}\sin^2\hat{\theta}+\cos^2\hat{\theta}=1\\ \sin2\hat{\theta}=2\sin\hat{\theta}\cos\hat{\theta}\\ \cos2\hat{\theta}=\cos^2\hat{\theta}-\sin^2\hat{\theta}\end{cases} \tag{15}$$

并推导出空间三角形的正弦定理和余弦定理，其正弦定理如下：

$$\sin\hat{\theta}_1/\sin\hat{\alpha}_{23}=\sin\hat{\theta}_2/\sin\hat{\alpha}_{31}=\sin\hat{\theta}_3/\sin\hat{\alpha}_{12} \tag{16}$$

空间三角形余弦定理则是下面四个关系式：

$$\begin{cases}\cos\hat{\alpha}_{23}=\cos\hat{\alpha}_{31}\cos\hat{\alpha}_{12}-\sin\hat{\alpha}_{31}\sin\hat{\alpha}_{12}\cos\hat{\theta}_1\\ \cos\hat{\theta}_3=\cos\hat{\theta}_1\cos\hat{\theta}_2-\cos\hat{\alpha}_{12}\sin\hat{\theta}_1\sin\hat{\theta}_2\\ -\sin\hat{\alpha}_{23}\cos\hat{\theta}_3=\sin\hat{\alpha}_{31}\cos\hat{\alpha}_{12}+\cos\hat{\alpha}_{31}\sin\hat{\alpha}_{12}\cos\hat{\theta}_1\\ -\cos\hat{\alpha}_{31}\sin\hat{\theta}_3=\sin\hat{\theta}_1\cos\hat{\theta}_2+\cos\hat{\alpha}_{12}\cos\hat{\theta}_1\sin\hat{\theta}_2\end{cases} \tag{17}$$

对于平面特殊情形，有：

$\hat{\alpha}_{ij}=0+\in a_{ij}$　　　$(ij=12,\ 23,\ 31)$

$\hat{\theta}_j=\theta_j$　　　$(j=1,\ 2,\ 3)$

因此根据泰勒公式（6），（16）可简化为下列结果：

$$\sin\theta_1/a_{23}=\sin\theta_2/a_{31}=\sin\theta_3/a_{12} \quad (18)$$

这便是熟知的平面三角形正弦定理。

2 空间机构的设计应用

今提出设计实例：求由回转副（R）、移动副（P）和圆柱副（C）组成的空间五杆机构 $RCPRC$ 的位形，机构如图2所示。

现用对偶数和四元数代数来解决这一实例，其解法过程如下：

根据对偶角理论，有：

$$\begin{cases}\hat{\alpha}_{12}=\alpha_{12}+\epsilon a_{12}\\ \hat{\alpha}_{23}=\alpha_{23}+\epsilon a_{23}\\ \hat{\alpha}_{34}=\alpha_{34}+\epsilon a_{34}\\ \hat{\alpha}_{45}=\alpha_{45}+\epsilon a_{45}\\ \hat{\alpha}_{51}=\alpha_{51}+\epsilon a_{51}\end{cases} \quad (19)$$

和

$$\begin{cases}\hat{\theta}_1=\theta_1+\epsilon S_1\\ \hat{\theta}_2=\theta_2+\epsilon S_2\\ \hat{\theta}_3=\theta_3+\epsilon S_3\\ \hat{\theta}_4=\theta_4+\epsilon S_4\\ \hat{\theta}_5=\theta_5+\epsilon S_5\end{cases} \quad (20)$$

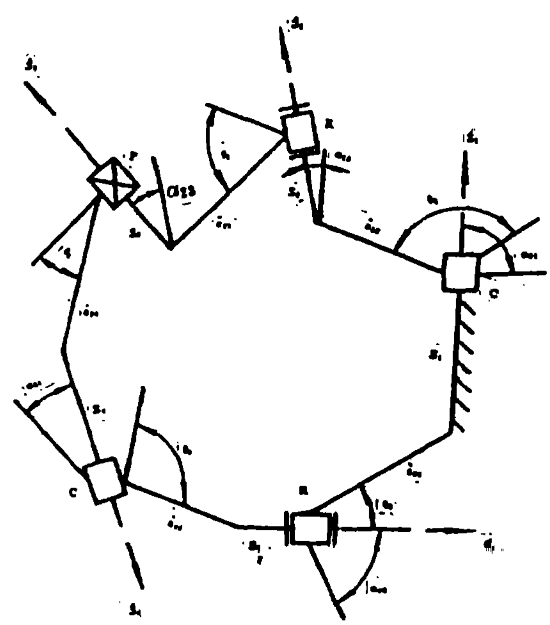

图2

式中，$\hat{\alpha}_{45}$、$\hat{\alpha}_{12}$、$\hat{\alpha}_{51}$分别表示输入件、输出件和机架的对偶角。θ_5是已知的输入运动，θ_1、θ_2、θ_4、S_1、S_3、S_4待求。其余结构参数已知，θ_3、S_2、S_5为不变量。由于

$$\begin{cases}\hat{S}_1=Q_{51}\hat{S}_5\\ \hat{S}_2=Q_{12}\hat{S}_1\\ \hat{S}_3=Q_{23}\hat{S}_2\\ \hat{S}_4=Q_{34}\hat{S}_3\\ \hat{S}_5=Q_{45}\hat{S}_4\end{cases} \quad (21)$$

及有

$$\begin{cases}\hat{a}_{12}=Q_1\hat{a}_{51}\\ \hat{a}_{23}=Q_2\hat{a}_{12}\\ \hat{a}_{34}=Q_3\hat{a}_{23}\\ \hat{a}_{45}=Q_4\hat{a}_{34}\\ \hat{a}_{51}=Q_5\hat{a}_{45}\end{cases} \quad (22)$$

式中，Q_{ij}、Q_k是旋转因子，可推出：

$$Q_{ij}=\cos\hat{a}_{ij}+\hat{a}_{ij}\sin\hat{a}_{ij} \tag{23}$$

$$Q_k=\cos\hat{\theta}_k+\hat{S}_k\sin\hat{\theta}_k \tag{24}$$

(ij=12, 23, 34, 45, 51)

(k=1, 2, 3, 4, 5)

方程组（21）自身循环代换，可得：$Q_{23}Q_{12}Q_{51}Q_{45}Q_{34}=1$　　(25)

由（25）可导出下列三个方程：

$$S_1S_{12}S_5S_{45}C_{23}+S_2S_{23}S_5S_{45}C_1+S_1S_{23}S_5S_{45}C_2C_{12}+S_{12}S_{23}S_{45}S_{51}C_2C_5+S_1S_2S_{23}S_{45}C_5C_{51}-S_{45}S_{51}C_5C_{12}C_{23}-C_{23}C_1C_5S_{12}S_{45}C_{51}+S_1S_2S_{23}S_{51}C_{45}-S_{23}S_{51}C_1C_2C_{12}C_{45}-S_{23}S_{45}C_1C_2C_5C_{12}C_{51}+C_{12}C_{23}C_{45}C_{51}-S_{12}S_{23}C_2C_{45}C_{51}-S_{12}S_{51}C_1C_{23}C_{45}-C_{34}=0 \tag{26}$$

$$S_1S_{12}C_{23}C_{45}C_{51}+S_2S_{23}C_1C_{45}C_{51}+S_1S_{23}C_2C_{12}C_{45}C_{51}+S_5S_{12}S_{45}S_{23}C_2-S_5S_{45}C_{12}C_{23}-S_1S_{12}S_{45}S_{51}C_5C_{23}-S_2S_{23}S_{45}S_{51}C_1C_5-S_1S_{23}S_{45}S_{51}C_2C_5C_{12}+S_4S_{34}S_{45}S_{51}-S_4S_{34}C_5C_{45}C_{51}-S_5S_{34}C_4C_{51}=0 \tag{27}$$

$$S_4S_{34}S_{45}C_{51}+S_5S_{34}S_{51}C_4+S_4S_{34}S_{51}C_5C_{45}+S_1S_2S_5S_{23}S_{45}-S_5S_{12}S_{45}C_1C_{23}-S_5S_{23}S_{45}C_1C_2C_{12}-S_1S_{12}S_{51}C_{23}C_{45}-S_2S_{23}S_{51}C_1C_{45}-S_1S_{23}S_{51}C_2C_{12}C_{45}-S_1S_{12}S_{45}C_5C_{23}C_{51}-S_2S_{23}S_{45}C_1C_5C_{51}-S_1S_{23}S_{45}C_2C_5C_{12}C_{51}=0 \tag{28}$$

式中，$S_k=\sin\hat{\theta}_k$，$C_k=\cos\hat{\theta}_k$，$S_{jk}=\sin\hat{a}_{jk}$，$C_{jk}=\cos\hat{a}_{jk}$。

分离（26），（27），（28）的原部和对偶部，可以得出6个实数方程，由其中的独立方程可解出未知量θ_1、θ_2、θ_4、S_1和S_4。S_3则可由关系式

$$\hat{a}_{34}=Q_3\hat{a}_{23}$$

导出的方程：

$$C_1C_2C_3-S_1S_2C_3C_{12}-S_1S_3C_2C_{12}C_{23}-S_2S_3C_1C_{23}+S_1S_{12}S_{23}S_3+S_4S_5C_{45}-C_4C_5=0 \tag{29}$$

解出。

最后得出的解可有两组，代表了机构的两种组装的形式。

3　一些数字结果

选取空间RCPRC五杆机构的结构参数如下：$\alpha_{12}=70°$，$\alpha_{23}=60°$，$\alpha_{34}=60°$，$\alpha_{45}=30°$，$\alpha_{51}=70°$，$a_{12}=10cm$，$a_{23}=30cm$，$a_{34}=50cm$，$a_{45}=20cm$，$a_{51}=20cm$，$\theta_3=60°$，$S_2=15cm$，$S_5=10cm$。

对应于输入θ_5的不同数值，现算出机构空间位置的一组解如表1。

表1

θ_5	θ_1	θ_2	θ_4	S_1 (cm)	S_4 (cm)	S_3 (cm)
−90°	106°	64°	275°	182	−155	24
−45°	104°	42°	244°	121	−105	50
0°	90°	32°	201°	103	−93	49
45°	64°	42°	159°	116	−133	46
90°	48°	64°	117°	182	−226	22

4 结论

对偶数和四元数代数用于空间机构和机器人设计，能把难以处理的空间几何问题转化为代数问题，从而易于寻得解答，因此有重要的意义。它除了用于解决空间机构和机器人的位形问题外，还能解决速度和受力分析等一系列问题。

参 考 文 献

1 Dimentberg F. M. The Determination of the positions of Spatial Mechanisms, Izdatel'stvo Akademii Nauk, Moscow. 1950. 142

2 Denavit J. Displacement Analysis of Mechanisms Based on (2×2) Matrices of Dual Numbers, VDI—Berichte. 1958, 29: 81～89

3 Yang A. T. Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms, Transactions of the ASME. 1964, 6: 300～308

AN ALGEBRAIC METHOD TO SPATIAL MECHANISMS DESIGN

Li Dewei
(Department of Agricultutal Engineering)

Abstract This paper gives a brief account of Dual—Number and Quaternion Algebra and its significance on spatial mechanisms and robots design. As a specimen the author studied the displacement of the spatial RCPRC five—link mechanism, deduced the calculation formulae and obtained the numerical results.

Key words Spatial mechanism; Dual—Number; Quaternion