华南农业大学学报 15 (3) 1994: 145～150
J.South China Agr.Univ.

矩阵可对角化的充要条件及其相似变换矩阵的构造

曾文才
(华南农业大学基础部，广州,510642)

摘要 本文证明了 N 阶矩阵与对角形矩阵相似的两个充要条件，并提供了一种构造可对角化矩阵的相似变换矩阵的简易方法。

关键词 矩阵；对角化；特征值；特征向量；相似变换
中图分类号 O151.21

判别一个 N 阶矩阵是否相似于对角形阵 Λ, 文献 (Nering,1988; 钱吉林，1988; 周士藩，1982) 综合给出了多种方法。但不管哪一种方法，都是通过解齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)X=0$ 以获得相似变换矩阵 P, 而我们知道解方程组有时是相当烦琐的。本文所证得的方法则把判别矩阵的相似性与求特征向量融为一体：仅利用矩阵的乘法运算．便可判定矩阵是否相似于对角形阵，并在确知矩阵可对角化的同时，容易地求出对应于不同特征值的线性无关的特征向量，从而构造出相似变换矩阵，完全无须解线性方程组。

1 几个定理

定理 1 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为 N 阶矩阵 A 的相异特征值，其重数分别为 $N_1, N_2, \cdots, N_s$, 且 $\sum_i N_i=N$, 则 A 与对角形矩阵相似的充要条件是

$$\prod_i(\lambda_i E-A)=0$$

证：必要性：若 A 相似于对角形阵 Λ, 则存在可逆矩阵 P 使得

$$A=P\Lambda P^{-1}=P\begin{bmatrix}\lambda_1E_1 & & & \\ & \lambda_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sE_s\end{bmatrix}P^{-1}$$

其中 E_i 为 N_i 阶单位阵 $(i=1, \cdots, s)$，于是

$$\begin{aligned}(\lambda_iE-A)&=P(\lambda_iE-\Lambda)P^{-1}\\ &=P\begin{bmatrix}(\lambda_i-\lambda_1)E_1 & & & \\ & (\lambda_i-\lambda_2)E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_i-\lambda_s)E_s\end{bmatrix}P^{-1},\end{aligned}$$

1994－01－22 收稿

从而有

$$\prod_i(\lambda_i E - A) = \prod_i P(\lambda_i E - \Lambda)P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} \prod_i(\lambda_i - \lambda_1)E_1 & & & \\ & \prod_i(\lambda_i - \lambda_2)E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_i(\lambda_i - \lambda_s)E_s \end{bmatrix} P^{-1}$$

由于 $\prod_i(\lambda_i - \lambda_j)E_j = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, s)$, 所以

$$\prod_i(\lambda_i E - A) = 0$$

充分性: 因为对于任何 N 阶矩阵 A 都存在可逆矩阵 P, 使得

$$A = PJP^{-1} = P\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} P^{-1}$$

其中 J_j 为 Jordan 块 $(j = 1, 2, \cdots, s)$ (北大数学系，1988)。因此，要证 A 可对角化，只要证 $J_j = \lambda_j E_j (j = 1, 2, \cdots s)$, 由于

$$(\lambda_i E - A) = P(\lambda_i E - J)P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} (\lambda_i - \mathrm{J}_1)E_1 & & & \\ & (\lambda_i - \mathrm{J}_2)E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_i - J_s)E_s \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$\prod_i(\lambda_i E - A) = P\begin{bmatrix} \prod_i(\lambda_i - J_1)E_1 & & & \\ & \prod_i(\lambda_i - \mathrm{J}_2)\mathrm{E}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_i(\lambda_i - J_s)E_s \end{bmatrix} P^{-1}$$

所以，若 $\prod_i(\lambda_i E - A) = 0$, 则因 P 可逆而有 $\prod_i(\lambda_i E_i - J_j) = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, s)$,又当 $i \neq j$ 时，$(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$, $(\lambda_i E_j - J_j)$ 可逆，所以

$$(\lambda_j \mathrm{E}_j - \mathrm{J}_j) = 0$$

即 $J_j = \lambda_j E_j$ $(j = 1, 2, \cdots, \mathrm{s})$ 得证。

推论 1 若 A 为 N 阶实对称矩阵，则 $\prod_i(\lambda_i E - A) = 0$
其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为 A 的全部相异特征值。

定理 2 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_s$ 为 N 阶矩阵 A 的全部相异特征值，其重数分别为 $N_1, N_2, \cdots, N_s$, 则 A 与对角形阵相似的充要条件是 $W_j = \prod_{i \neq j}(\lambda_i E - A)$ 的秩为

$$R(W_j)=N_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

证 必要性: 与定理 1 的证明相仿可得

$$W_j=\prod_{i\neq j}(\lambda_i E-A)=P\begin{bmatrix}\prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_1)E_1 & & & \\ & \prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_2)E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_s)E_s\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix}O_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_j)E_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & O_s\end{bmatrix}P^{-1}$$

其中 O_j 和 E_j 分别为 N_j 阶的零矩阵和单位阵($j=1,\ 2,\ \cdots,\ s$)。
由于 P 满秩,且 $\lambda_i\neq\lambda_j$ ($i\neq j$), 所以

$$R(W_j)=R[\prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_j)E_j]=R(E_j)=N_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

充分性: 用反证法。假设 A 不可对角化,则因几何重数 ≤ 代数重数(张远达, 1980),必至少存在一正整数 k, 使得

$$\text{秩 } R(\lambda_k E-A)>N-N_k \qquad \text{(钱吉林, 1988)}$$

于是,当 $j\neq k$ 时,由 Sylvester 不等式, 有

$$\begin{aligned}N_j&=R[\prod_{i\neq j}(\lambda_i E-A)]\geqslant\sum_{i\neq j}R(\lambda_i E-A)-(s-2)N\\&>\sum_{i\neq j}(N-N_i)-(s-2)N=(s-1)N-\sum_{i\neq j}N_i-(s-2)N\\&=N-(N-N_j)=N_j\end{aligned}$$

矛盾,所以, A 可对角化。

定理 3 若矩阵 $A=(a_{ij})_{M\times N}$, $B=(b_{ij})_{N\times R}$, 且 $AB=0$, 则 B 的每个列向量都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量。

据分块矩阵乘法可证得(略)。

推论 2 设 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_s$ 为 N 阶矩阵 A 的相异特征值,其重数分别为 $N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_s$, 且 $\sum_i N_i=N$, 若 A 可对角化,则矩阵 $W_j=\prod_{i\neq j}(\lambda_i E-A)$ 的列向量组中有对应于 λ_j 的 N_j 个线性无关的特征向量($j=1,\ 2,\ \cdots,\ s$)。

证 因 A 可对角化, 由定理 1 有

$$\prod_i(\lambda_i \mathrm{E}-\mathrm{A})=0$$

即

$$(\lambda_j E-A)\prod_{i\neq j}(\lambda_i E-A)=(\lambda_j E-A)W_j=0$$

据定理 3, W_j 中的每一非零列向量都是方程组 $(\lambda_j E-A)=0$ 的解向量、即 λ_j 的特征向量。

又据定理2知，$R(W_j)=N_j$，所以，W_j的列向量组中有恰好对应于λ_j的N_j个线性无关的特征向量。

上述结论表明，要构造可对角化矩阵A的相似变换矩阵P，完全可以不象传统的方法那样解方程组$(\lambda_i E-A)=0$. 而只须对每一特征值$\lambda_j(j=1,\ 2,\ \cdots,s)$，从矩阵乘积$\prod\limits_{i\neq j}(\lambda_i E-A)$中直接找出$N_j$个与之对应的线性无关的特征向量，再以这样所得的$N=\sum\limits_j N_j$个特征向量为列作一$N$阶矩阵即可。

推论3　若N阶可对角化矩阵A只有两个相异的特征值λ_1(K重)和λ_2($N-K$重)，则矩阵$(\lambda_1 E-A)$(或$(\lambda_2 E-A)$)的$N-K$(或K)个线性无关的列向量就是对应λ_2(或λ_1)的特征向量组的最大线性无关组。

这一推论进一步表明，在可对角化矩阵A只有两个相异特征值的情况下，不仅不需要解方程组，而且不需要算矩阵的乘积就可以把对应于不同特征值的特征向量立即求出。

2　应用实例

例1　判别下列矩阵

$$(1)\ A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix},\qquad (2)\ B=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

是否对角化? 若可对角化，求出相似变换矩阵。

解　(1)由$|\lambda E-A|=0$得特征值$\lambda_1=3$(二重)，$\lambda_2=1$

由于$(\lambda_1 E-A)(\lambda_2 E-A)=\begin{bmatrix}4 & \\ & *\end{bmatrix}\neq 0$ (*代表可不必写出的元素，下同)

故由 定理1知A不可对角化。

(2)由$|\lambda E-B|=0$得特征值$\lambda_1=12$，$\lambda_2=3$(二重)。

$$W_1=(\lambda_2 E-B)=\begin{bmatrix}-4 & -4 & 1\\ -4 & -4 & 1\\ 4 & 4 & -1\end{bmatrix},\qquad W_2=(\lambda_1 E-B)=\begin{bmatrix}5 & -4 & 1\\ -4 & 5 & 1\\ 4 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

由于$(\lambda_1 E-B)(\lambda_2 E-B)=0$，所以$B$可对角化，由推论3可得

λ_1的一个特征向量$a_1=(1,\ 1,\ -1)'$(取W_1的第3列)；

λ_2的两个线性无关的特征向量$a_2=(-4,\ 5,\ 4)'$，$a_3=(1,\ 1、8)'$(取W_1的第2,3列)故相似变换矩阵

$$P=(a_1,\ a_2,\ a_3)=\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ -1 & 4 & 8\end{bmatrix},$$

$$PAP^{-1}=\mathrm{diag}(12,\ 3,\ 3)$$

例 2　求对称矩阵 A 的相似变换矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解　A 的特征向量 $\lambda_1=-1$(二重), $\lambda_2=5$, $\lambda_3=1$, 而

$$W_1=(\lambda_2E-A)(\lambda_3E-A)=\begin{bmatrix}8 & -4 & \\ -4 & 8 & * \\ -4 & -4 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix},$$

$$W_2=(\lambda_1E-A)(\lambda_3E-A)=\begin{bmatrix}8 & \\ 8 & \\ 8 & * \\ 0 & \end{bmatrix},\quad W_3=(\lambda_1E-A)(\lambda_2E-A)=\begin{bmatrix} & 0\\ & 0\\ * & 0\\ & -8\end{bmatrix}$$

因此，由推论 2 可得

λ_1 的特征向量　$a_1=(8,\ -4,\ -4,\ 0)',\ a_2=(-4,\ 8,\ -4,\ 0)'$

λ_2, λ_3 的特征向量分别为　$a_3=(8,\ 8,\ 8,\ 0)'$, $a_4=(0,\ 0,\ 0,\ -8)'$

于是相似变换矩阵为

$$P=(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ )=\begin{bmatrix}8 & -4 & 8 & 0\\ -4 & 8 & 8 & 0\\ -4 & -4 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -8\end{bmatrix},$$

$PAP^{-1}=\mathrm{diag}(-1,\ -1,\ 5,\ 1)$。

参 考 文 献

北京大学数学系. 1988. 高等代数. 北京:高等教育出版社, 180～185

张远达. 1980. 线性代数原理. 上海:上海教育出版社, 211～252

周永佩. 1990. Jordan 标准型定理的一种证法. 中国科学技术大学学报, 15(4): 156～162

周士藩. 1982. 对合矩阵相似于对角矩阵的一个简单证法. 数学通报, (5): 27～29

钱吉林. 1988. 矩阵及其广义逆. 武汉:华中师范大学出版社, 20～43

Lang S. 1987. Linear Algebra. 2nd. Londan: Addison-wesley Publishing Conpany reading. 100～120

Nering E D. 1988. Linear Algebra and Matrix theory. 2nd. New york: John Wiley and Sons, Inc, 113～127

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE DIAGONLIZABLITY OF MATRICES AND THE CONSTRUCTION OF SIMILARITY TRANSFORMATION MATRICES

Zeng Wencai

(Dept. of Basic Courses, South China Agr. Univ., Guangzhou, 510642)

Abstract

This paper proves two necessary and sufficient conditions for a matrix to be similar to a diagonal matrix, and provides a simple method for constructing the similarity transformation matrices of a diagonalizable matrix.

Key words matrices; eigenvalues; eigenvectors; diagonalization; similarity transformations