华南农业大学学报 16 (1) 1995: 122 ~126
J.South China Agr.Univ.

商 Riesz 空间注记*

王石安 余彩玉

(华南农业大学基础部，广州，510642)

摘要 给出 Riesz 空间关于下定向子空间所作商空间仍是 Riesz 空间的特征。同时讨论了 Riesz 空间之间的同态关系。

关键词 Riesz 空间；理想；商空间
中图分类号 O177. 3

设 E 是一向量空间，E_o 是 E 的线性子空间，则 $E/E_o=\{x=x+E_o \mid x\in E\}$ 也是一向量空间。如果在 E 上定义一个半序 $\geqslant$(即 $\geqslant$ 是自反的、反对称的和传递的)满足条件:

(1)若 $x\geqslant y$，则对所有 $z\in E$ 有 $x+z\geqslant y+z_o$

(2)若 $x\geqslant y$，则对所有 $\alpha\geqslant 0$ 有 $\alpha x\geqslant \alpha y$

则称 E 是一半序线性空间，E 中所有正元素的集合 $E_+=\{x\in E \mid x\geqslant 0)$ 称为 E 的锥、若 E_+ 满足 $E_+\cap(-E_+)=\{0\}$，则称 E_+ 为真锥。若半序线性空间 (E, E_+) 中的任意两个元素 x, y 的上确界 $x\vee y$ 和下确界 $x\vee y$ 均在 E 中存在，则称 (E, E_+) 为 Riesz 空间。当 E_o 为半序线性空间 (E, E_+) 的线性子空间时，商空间 E/E_o 自然地关于锥 QE_+ 成为一半序线性空间(Wong, 1980)，若 (E, E_+) 还是 Riesz 空间，则 $(E/E_o, QE_+)$ 一般不再是 Riesz 空间。但 Schwarz(1984)曾断言:QE_+ 是真锥当且仅当 E_o 是一理想或 E/E_o 是 Riesz 空间当且仅当 E_0 是一理想。本文举例说明这个断言是错误的，并给出Riesz 空间关于下定向子空间所作商空间仍是 Riesz 空间的特征。同时还将讨论 Riesz 空间之间的同态关系。

本文总假设 (E, E_+), (F, F_+) 为 Riesz 空间，并记 $x^+=x\vee 0$, $x^-=(-x)\vee 0$, $|x|=x\vee(-x)$ 分别为 Riesz 空间 E 中元素 x 的正部、负部和模。Riesz 空间 E 中线子空间 E_o 称为Riesz子空间(相应地，正理想、理想、下定向的和序凸的)，如果 x, $y\in E_o$，则 $x\vee y\in E_o$ (相应的，$F_p(E_o)=(E_o-E_+)\cap E_+\subset E_o$，$E_o=S(E_o)=\cup\{[-u, u], u\in E_o\cap E_+\}$、若 x, $y\in E_o$ 则存在 $z\in E_o$ 使得 $z\leqslant x$ 且 $z\leqslant y$ 和 $E_o=F(E_o)=(E_o+E_+)\cap(E_o-E_+)$)。

1 商 Riesz 空间的特征

首先我们有如下正理想、理想和 Riesz 子空间之间关系:

引理 1 设 E_o 为 E 的线性子空间，则下述条件等价:

(1)E_o 为 E 的理想

(2)E_o 是 E 的 Riesz 子空间且是正理想

(3)E_o 是下定向的且序凸

证明: (1)$\Longleftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(3) 是容易的，往证 (3)$\Rightarrow$(2), $\forall x\in E_o$，由于 E_o 是下定向的，所以

1994－06－01 收稿
*校长基金资助项目

存在 $y\in E_o$ 使得 $y\leqslant x$ 且 $y\leqslant 0$, 从而 $y\leqslant x\wedge 0$ 或

$$0\leqslant x^-=(-x)\vee 0=-(x\wedge 0)\leqslant -y\in E_o$$

又 E_o 是序凸的,所以 E_o 是正理想且有 $x^-\in E_o$, 从而 E_o 是 Riesz 子空间。

Luxemburg 和 Zaanen(1971) 给出锥 QE_+ 中的元素的如下特征:

引理 2 $\hat{x}\in QE_+$ 当且仅当存 $y\in E_o$ 使得 $x+y\geqslant 0$

由定义及引理 2 立即可得到:

引理 3 QE_+ 是真锥当且仅当 E_o 是 E 中正理想。

下述例说明 Schwarz 的断言是错误的.

例 1 存在一正理想但非理想 E_o 使得 E/E_o 是一 Riesz 空间。比如, 设 $E=(\mathbf{R}^2,\leqslant)$, $E_+=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\geqslant y\geqslant 0\}$, 又设 $E_o=\{(0,x)\mid x\in\mathbf{R}\}$, 则 E/E_o Riesz 同构于 $\mathbf{R}$,从而从而是一 Riesz 空间,但易知 E_o 是一个正理想而非理想。

对于下定向子空间 E_o, 我们有如下 E/E_o 是 Riesz 空间的特征:

定理 1 设 E_o 是 Riesz 空间 E 中下定向线性子空间,则下述条件等价:

(1) $(E/E_o, QE_+)$ 是一 Riesz 空间

(2)商映射 Q: $E\to E/E_o$ 满足

$$Q(x\vee y)=Q(x)\vee Q(y)\qquad \forall\ x,y\in E$$

(3)QE_+ 是一真锥

(4)E_o 为一理想

(5)E_o 是序凸的

(6)E_o 为一正理想

(7)E_o 为一正理想且 $\hat{x}\in E/E_o$, $\hat{x}\geqslant\hat{0}\Longleftrightarrow\widehat{|x|}=\hat{x}$

证明: 容易验证, 当 E_o 为线性子空间时,

$$Fp(E_o)\subset S(E_o)\subset F(E_o)\subset Fp(E_o)+E_o$$

所以 (6)$\Longleftrightarrow$(5)$\Longleftrightarrow$(4), 由引理 3 知 (6)$\Longleftrightarrow$(3), 又 (7)$\Rightarrow$(6) 显然成立, 因此我们只须证 (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(7) 及 (6)$\Rightarrow$(1) 即可。为此设 $(E/E_o, QE_+)$ 为一 Riesz 空间, $x,y\in E/E_o$,则则 $Q(x)\vee Q(y)=\hat{x}\vee\hat{y}$ 存在, 由引理 2 知 $\hat{x}\leqslant\widehat{x\vee y}$ 且 $\hat{y}\leqslant\widehat{x\vee y}$.

设 $\hat{z}\in E/E_o$ 使得 $\hat{x}\leqslant\hat{z}$ 且 $\hat{y}\leqslant\hat{z}$, 则由引理 2 知存在 $z_1,z_2\in E_o$ 使得 $z-x\geqslant z_1$, $z-y\geqslant z_2$, 又 E_o 是下定向的, 所以存在 $u\in E_o$ 使得 $u\leqslant z_1$ 且 $u\leqslant z_2$, 从而 $z-x\geqslant u$ 且 $z-y\geqslant u$, 于是

$$z\geqslant(u+x)\vee(u+y)=u+x\vee y$$

所以 $\hat{z}\geqslant\widehat{x\vee y}$ 因而 $\widehat{x\vee y}=\hat{x}\vee\hat{y}$

即 $Q(x\vee y)=Q(x)\vee(Q(y)$, 这就证明了 (1)$\Rightarrow$(2)

至于 (2)$\Rightarrow$(7)、只须证 $\hat{x}\geqslant 0\Rightarrow\widehat{|x|}=\hat{x}$, 为此, 由 (2) 知

$$\hat{x}=Q(x)=Q(x)\vee(-Q(x))=Q(x\vee(-x))=Q(|x|)=\widehat{|x|}.$$

(6)$\Rightarrow$(1): 设 $x\in E$, 则由引理 2 知

$$\hat{x}\leqslant\widehat{x^+}\quad 且\quad \hat{0}\leqslant\widehat{x^+}$$

另一方面,假设在 E/E_o 中有 $\hat{x}\leqslant\hat{y}$ 且 $\hat{0}\leqslant\hat{y}$ 取 $x_1\in\hat{x}$, $y_i\in\hat{y}$ $(i=1、2)$ 使得 $x_1\leqslant y_1$ 且 $0\leqslant y_2$,

则

$$\begin{aligned}x&=x_1+(x-x_1)\leqslant y_1\vee y_2+(x-x_1)^+\\&=y_1+(y_2-y_1)^++(x-x_1)^+\in y_1+E_o\end{aligned}$$

又

$$0 \leqslant y_1 \vee y_2 + (x - x_1)^+$$

所以 $x^+ \leqslant y_1 + (y_2 - y_1)^+ + (x - x_1)^+$

于是

$$\widehat{x^+} \leqslant \hat{y}_1 = \hat{y}$$

所以 $(\hat{x})^+ = \widehat{x^+}$，从而可知 E/E_0 是一Riesz空间。

注：若线性子空间 E_0 不是下定向的，因而也不是理想，E/E_0 也有可能是Riesz空间

例 2 设 $E = (\mathbf{R}^2, \leqslant)$，$E_+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$

又设 $E_0 = \{(x, -x) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$，则 E/E_0 Riesz同构于$\mathbf{R}$. 因而是一Riesz空间，但容易看出 E_0 不是下定向的，因而也不是理想。

2 Riesz空间的同态

Riesz空间E和F之间的算子$\mathrm{T}: E \to F$称为Riesz同态，如果$\mathrm{T}(x \vee y) = \mathrm{T}(x) \vee \mathrm{T}(y)$, $x, y \in E$。如果T还是1－1的，则称T为Riesz同构。如果存在E到F的满Riesz同构，则称E与F Riesz同构。本节首先给出满Riesz同态的分解定理，然后作为推论得出Riesz同态的基本定理。

定理 2 设E、F是Riesz空间，T是E到F的满Riesz同态，A是E的理想，若

$$A \subset \mathrm{KerT} = \{x \in E \mid \mathrm{T}(x) = 0\}$$

则存在唯一的满Riesz同态$\mathrm{T}^*: E/A \to F$、使得

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^* \circ \mathrm{Q}$$

其中Q: $E \to E/A$ 是典型商映射。并且，T^*是Riesz同构当且仅当 $A = \mathrm{KerT}$

证明 令$\mathrm{T}^*: E/A \to F: \mathrm{T}^*(\hat{x}) = \mathrm{T}(x)$，易知$\mathrm{T}^*$有定义且是满的。对任意的$\hat{x}, \hat{y} \in E/A$，由定理1知

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^*(x \vee y) &= \mathrm{T}^*(\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{Q}(y)) = \mathrm{T}^*(\mathrm{Q}(x \vee y)) \\ &= \mathrm{T}^*(\widehat{x \vee y}) = \mathrm{T}(x \vee y) = \mathrm{T}(x) \vee \mathrm{T}(y) \\ &= \mathrm{T}^*(\hat{x}) \vee \mathrm{T}^*(\hat{y})\end{aligned}$$

所以，T^*是一Riesz同态。

又由于Q:$E \to E/A$是典型同态，所以$\mathrm{T}^* \circ \mathrm{Q}$是$E$到$F$的满同态，且

$$\mathrm{T}^* \circ \mathrm{Q}(x) = \mathrm{T}^*(\hat{x}) = \mathrm{T}(x) \qquad \forall x \in E$$

因此 $\mathrm{T}^* \circ \mathrm{Q} = \mathrm{T}$

若存在E/A到F的满同态S^*，使得

$$\mathrm{S}^* \circ \mathrm{Q} = \mathrm{T}$$

则 $\mathrm{S}^*(\hat{x}) = \mathrm{S}^* \circ \mathrm{Q}(x) = \mathrm{T}(x) = \mathrm{T}^*(\hat{x}) \qquad \forall x \in E/A$

所以 $\mathrm{S}^* = \mathrm{T}^*$，这就是证明了$\mathrm{T}^*$是唯一的。

如果 $A = \mathrm{KerT}$ 且 $\mathrm{T}^*(\hat{x}) = \mathrm{T}^*(\hat{y})$，则 $\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(y)$ 或者$\mathrm{T}(x - y) = 0$,

从而 $x - y \in \mathrm{KerT} = A$，于是 $\hat{x} = \hat{y}$，即T^*是1－1的，因此T^*是E/A到F的Riesz同构。

反之，若T^*为E/A到F的Riesz同构，则$\forall x \in \mathrm{KerT}$，有$\mathrm{T}^*(\hat{x}) = \mathrm{T}(x) = 0$，从而$\hat{x} \in \mathrm{KerT}^* = \{\hat{0}\}$ 于是$\hat{x} = \hat{0}$或$x \in A$

所以 $\mathrm{KerT} \subset A$，结合题设$A \subset \mathrm{KerT}$知

$A=\mathrm{KerT}$

由定理 2 可得

定理 3 (Riesz 同态基本定理)　设 E 是一 Riesz 空间，则 E 的任一商空间 E/A(其中 A 是 E 的理想)都是 E 的 Riesz 同态象;反之，若 F 是 E 的某一同态象:$F=\mathrm{T}(E)$，则 F Riesz 同构于 $E/\mathrm{Ker\,T}$。

下面给出定理 3 的应用

定理 4　设 A、B 是 Riesz 空间 E 的理想，则 $A\cap B$ 及 $A+B$ 都是 E 的理想且

$$(A+B)/B \quad \text{Riesz 同构于 } A/A\cap B$$

证明　易知 $A\cap B$ 是 E 的理想，设

$$|x|\leqslant|y| \text{ 且 } y\in A+B, \text{ 则}$$

存在 $a\in A$, $b\in B$, 使得 $y=a+b$ 令

$$a_1=[x\vee(-|a|)]\wedge|a| \qquad \text{且 } b_1=x-a_1$$

则 $|a_1|\leqslant|a|$　且

$$b_1=x-[x\vee(-|a|)]\wedge|a|$$
$$=[o\wedge(x+|a|)]\vee(x-|a|)$$

另一方面，由 $|x|\leqslant|y|=|a+b|\leqslant|a|+|b|$　知

$$x+|a|\geqslant-|b|$$
$$x-|a|\leqslant|b|$$

于是

$$-|b|\leqslant 0\wedge(-|b|)\leqslant 0\wedge(x+|a|)$$
$$\leqslant b_1\leqslant 0\vee(x-|a|)\leqslant|b|$$

即

$$|b_1|\leqslant|b|$$

由于 $a\in A$, $b\in B$ 且 A、B 均是 E 的理想，所以 $a_1\in A$, $b_1\in B$, 即 $x=a_1+b_1\in A+B$, 所以，$A+B$ 也是 E 的理想。

易知 B 是 $A+B$ 的理想，$A\cap B$ 是 A 的理想,从而 $(A+B)/B$ 及 $A\cap B$ 均是 Riesz 空间，对任意的 $a\in A$，有 $a+B\in(A+B)/B$，且 $a+B$ 由 a 唯一确定，令 $\mathrm{T}:A\to(A+B)/B:\mathrm{T}(a)=a+B$, 则 T 是 A 到 $(A+B)/B$ 的映射,由于 $(A+B)/B$ 的每一元都具有 $a+B$ 的形式,所以 T 是 A 到 $(A+B)/B$ 的满射,易见 T 是 A 到 $(A+B)/B$ 的满 Riesz 同态。而且 $\mathrm{KerT}=A\cap B$，事实上对任意的 $a\in A\cap B$ 有 $\mathrm{T}(a)=a+B=B$. 所以 $a\in\mathrm{KerT}$ 从而 $A\cap B\subset\mathrm{KerT}$，另一方面,对任意的 $a\in\mathrm{KerT}$, $\mathrm{T}(a)=a+B=B$, 从而有 $a\in A\cap B$ 所以 $\mathrm{KerT}\subset A\cap B$ 于是有 $\mathrm{KerT}=A\cap B$

由 Riesz 同态基本定理得

$$A/A\cap B \text{ 与 } (A+B)/B \text{ Riesz 同构。}$$

参 考 文 献

Luxemburg W A. Zaanen A C. 1971. Riesz Spaces I. Amsterdam: North－Holland. 23～107

Schwarz H U. 1984. Banach Lattices and Operators: Teuber－Texte Zur Mathematik Band 71. Leipig:[s.n.]25～29

Wong Y C. 1980. An Introduction to Ordered Vector SPaces. Taiwan:[s.n.]29～31

A NOTE ON QUOTIENT RIESZ SPACES

Wang Shi'an Yu Caiyu
(Dept. of Basic Courses, South China Agr. Univ., Guangzhou, 510642)

Abstract

Reports a characterization of a quotient space E/E_0 of Riesz space E with respect to some downward directed Sudspace E_0 finding it to be still a Riesz a Space. Riesz homomorphisms between Riesz space were also studied.

Key words Riesz space; ideal; quotient space