华南农业大学学报 16(4) 1995: 106~109
J. South China Agr. Univ.

一类随机模型*

郭子君
(华南农业大学基础部,广州,510642)

摘要 介绍了一类随机模型,给出了其特殊情形下解的表示.考虑随机影响,讨论了群体增长的随机微分方程模型.

关键词 数学模型;微分方程;随机微分方程;解;均值;方差
中图分类号 O211.63

关于客观世界的数学描述(模型)是数学应用研究的一个重要领域。由于客观世界的复杂性及随机偶然性,为了更好地反映客观世界的本质,我们对随机性必须予以足够的重视。因此,包括随机影响的随机模型的研究便显得非常重要。以往,生物数学中的随机模型大都是概率的 Kolmogorov 方程,此类模型要求状态变量具有 Markov 性质(杨纪珂等,1979)。本文中,我们给出一类新的随机模型 —— 随机微分方程模型。像微分方程模型一样、方程是关于状态变量本身的。

1 随机微分方程

自 1942 年 K · ito 提出了 ito 方程后,随机微分方程的研究才逐渐开展起来。简单地说,随机微分方程是微分方程的随机化,是包含随机影响的微分方程。我们知道

$$\mathrm{d}x(t)=a(t,x(t))\mathrm{d}t \quad \cdots\cdots \quad (1.1)$$

表示时刻 t 的变化率 $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ 可以用 t 和位置 $x(t)$ 的函数 $a(t,x(t))$ 来刻划。如果每时刻都有随机波动,我们把随机因素取做 Brown 运动(Wiener 过程)$B(t,\omega)$ 的微分 $\mathrm{d}B(t,\omega)$,由于 $\mathrm{d}B(t,\omega)$ 是 $(t,t+\Delta t)$ 内的标准随机影响,用时间 t 和位置 $x(t,\omega)$ 的函数 $\delta(t,x(t))$ 把它放大(缩小)当作随机影响,则上式(1.1)变成:

$$\mathrm{d}X(t,\omega)=a(t,x(t,\omega))\mathrm{d}t+\delta(t,x(t,\omega))\mathrm{d}B(t,\omega) \quad \cdots\cdots \quad (1.2)$$

方程(1.2)是方程(1.1)的随机化。(1.2)便是一个随机微分方程。1905 年爱因斯坦(Einstein)研究布朗运动时,提出悬浮于液体中花粉的运动方程:

$$m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-2\pi r\mu V+N(t,\omega) \quad \cdots\cdots \quad (1.3)$$

其中 μ 为粘滞系数,r 为花粉半径.

(1.3)可理解为:

(花粉的受力)=(液体的阻力)+(液体分子的随机冲击力)

记 $\alpha=2\pi r\mu/m$, $w(t,\omega)=\int_0^t \frac{N(s,\omega)}{m}\mathrm{d}s$,

1995-03-29 收稿
*校长基金资助课题

(1.3) 可写成：

$$dv(t,\omega)=-\alpha v(t,w)dt+dw(t,\omega) \quad \cdots\cdots \quad (1.4)$$

(1.4) 称为 Einstein－langevin 方程，它是至今所见的最早的随机微分方程。

2 随机微分方程的解

考虑方程 (1.2) 的一种简单 (线性) 情形：

$$dX(t)=[\alpha(t)+\beta(t)x(t)]dt+[r(t)+\delta(t)x(t)]dw(t) \quad \cdots\cdots \quad (2.1)$$

方程 (2.1) 存在满足初始条件 $X(t_0)=X_0$ 的唯一解，且可表示为 (Wu, 1985)：

$$x(t)=\hat{x}(t)\zeta(t) \quad \cdots\cdots \quad (2.2)$$

其中：

$$\hat{x}(t)=\exp\{\int_{t_0}^{t}[\beta(s)-\frac{1}{2}\delta^2(s)]ds+\int_{t_0}^{t}\delta(s)dw(s)\}$$

$$\zeta(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\hat{x}^{-1}(s)[\alpha(s)-r(s)\delta(s)]ds+\int_{t_0}^{t}\hat{x}^{-1}(s)r(s)dw(s)$$

一 > 如果方程 (2.1) 是齐次的，即：

$$dx(t)=\beta(t)x(t)dt+\delta(t)x(t)dw(t) \quad \cdots\cdots \quad (2.3)$$

则

$$\hat{x}(t)=\exp\{\int_{t_0}^{t}[\beta(s)-\frac{1}{2}\delta^2(s)]ds+\int_{t_0}^{t}\delta(s)dw(s)\}$$

$$\zeta(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\hat{x}^{-1}(s)\cdot 0\cdot ds+\int_{t_0}^{t}\hat{x}^{-1}(s)\cdot 0\cdot dw(s)=x(t_0)$$

从而

$$x(t)=\hat{x}(t)\zeta(t)=x(t_0)\zeta(t) \quad \cdots\cdots \quad (2.4)$$

Ⅰ > 假设 $x(t_0)=0(a,s)$ 则 $x(t)=0(a,s)$

Ⅱ > 假设 $x^1(t)$、$x^2(t)$ 是方程 (2.3) 的两个解，则对于任意的 $C_1^{\cdot}, C_2^{\cdot}$, $C_1X^1(t_0)+C_2X^2(t_0)$ 有：

$x(t)=c_1x^1(t)+c_2x^2(t)$　是方程 (2.3) 满足初始条件 $c_1x^1(t_0)+c_2x^2(t)$ 的解。

二 > 对于方程 (2.1) 的特殊情形：

$$\begin{cases} dx(t)=-\alpha x(t)dt+\sigma dw(t) \\ x(t_0)=c \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (2.5)$$

其解可以写成如下形式：

$$x(t)=ce^{-\alpha(t-t_0)}+\sigma\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-s)}dw(s) \quad \cdots\cdots \quad (2.6)$$

并且此解过程 (2.6) 是 Gaussian 过程，这是我们通常所说的 Ornstein —— Uhlenbeck 过程。

由此可以得到 Einstein－langevin 方程 (1.4) 的满足初始条件的解过程。对于方程 (1.2) 的非线性形式，我们可以将之线性化处理，转化成对 (2.1) 的讨论。

随着随机积分理论的发展，随机微分方程的研究已拓展到关于一般半鞅的情形，对其解的存在性、唯一性、稳定性及爆炸性等问题有深入的结论 (郭子君，1991;Wu,1985)。与微分方程一样，多指标 (参数) 的随机微分方程 (如平面上的随机微分方程) 也已得到方泛的关注与研究。

3 群体增长模型

本部分，我们以群体的增长(沈毓毅等，1987；杨纪珂等，1979)为例，讨论其随机微分方程模型。

先看其确定性模型：

$$\begin{cases} dx(t) = (\lambda - u)x(t)dt \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (3.1)$$

其满足初始条件的解为：

$$x(t) = x_0 \exp[(\lambda - u)t] \quad \cdots\cdots \quad (3.2)$$

此模型告诉我们，只要初值 X_0 相同，则在一个给定时刻 $t>0$，群体的数量总是相同的，从而得出了在初始条件不变时，到时刻 t 时群体含量永远相同的结果，这一结论与实际情况并不相符，因为它忽视了影响群体增长的大量的随机性或偶然性因素。

考虑随机影响，我们给出一个简单的群体增长的随机微分方程模型：

$$\begin{cases} dx(t) = (\lambda - u)x(t)dt + b\,dw(t) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (3.3)$$

其中 $W(t)$ 是 Wiener 过程。

由式(2.5)及(2.6)知，(3.3)有唯一解：

$$x(t) = x(0)e^{(\lambda - u)t} + b\int_0^t e^{(\lambda - u)(t-s)}dw(s) \quad \cdots\cdots \quad (3.4)$$

根据方程(3.3)，讨论群体数量的均值与方差(蔡尚峰，1987)。

记： $m_x(t) = E\{x(t)\}$， $R_x(t) = Var\{x(t)\}$

显然

$$m_w(t) = E\{w(t)\} = 0$$
$$R_x(0) = Var\{x(0)\} = 0$$
$$R_w(t) = Var\{w(t)\} = t$$

由(3.3)知：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(m_x(t)\Big) = (\lambda - u)m_x(t) + b\,m_w(t) \\ m_x(0) = Ex(0) = x_0 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (3.5)$$

(3.5)是一个微分方程，解之得：

$$m_x(t) = x_0 e^{(\lambda - u)t} \quad \cdots\cdots \quad (3.6)$$

因此，平均的或期望的群体含量(3.6)与确定性模型得出的群体含量(3.2)有相同的值。从这点来说，(3.1)描述群体数量的平均值，(3.3)更考虑了随机因素的影响。

根据(3.3)，有：

$$R_x(t) = \Phi^2(t,0)R_x(0) + \int_0^t d\tau_1 \int_0^t \Phi(t,\tau_1)b \cdot R_w(\tau_2)b\Phi(t,\tau_2)d\tau_2 \quad \cdots\cdots \quad (3.7)$$

其中 $\Phi(t,t_0)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(\Phi(t,t_0)\Big) = (\lambda - u)\Phi(t,t_0) \\ \Phi(t_0,t_0) = 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (3.8)$$

由 (3.8) 可得

$$\Phi(t,t_0)=e^{(\lambda-u)(t-t_0)} \quad \cdots\cdots \quad (3.9)$$

将 (3.9) 代入 (3.7)　得：

$$R_x(t)=b^2e^{2t(\lambda-u)}\int_0^t e^{-(\lambda-u)\tau_1}d\tau_1\cdot\int_0^t e^{-(\lambda-u)\tau_2}\tau_2 d\tau_2$$

$$=\frac{b^2}{(\lambda-u)^2}\cdot e^{2t(\lambda-u)}\cdot(e^{(u-\lambda)t}-1)\ (te^{(u-\lambda)t}+\frac{1}{\lambda-u}\cdot e^{(u-\lambda)t}-\frac{1}{\lambda-u})\cdots(3.10)$$

在 (3.3) 中，随机影响由 Wiener 过程生成。类似地我们可以讨论关于一般半鞅的随机微分方程模型 (Wu, 1985; 郭子君，1991)。

4　结语

为简便起见，我们考虑了随机模型：

$$\begin{cases} dx(t)=(\lambda-u)x(t)dt+bdw(t) \\ x(0)=x_0>0 \end{cases}$$

根据随机分析的理论与方法，我们给出了解过程 (3.4) 以及均值 (3.6) 和方差 (3.10) 等统计特性，这些都是应用数学工作者所面对的基本问题。

如果 W(t) 不是 Wiener 过程，而是非零均值过程，我们亦可讨论该随机模型的解与统计特征，此时结论 (3.6) 不一定成立。

如果 b 为零，则随机系统退化成确定性系统。从而可以认为微分方程模型是随机微分方程模型的特殊情况。

参 考 文 献

沈毓毅，张炳根．1987. 关于单个种群的随机模型的周期解．生物数学学报，2(1): 30～36

Bharucha－Reid A T. 1979. 马尔可夫过程理论初步及其应用，杨纪珂等译．上海：上海科学技术出版社，170～177

郭子君，吴让泉．1991. 关于半鞅 SDE 解的比较定理．纺织基础科学学报，(3)：183～190

蔡尚峰．1987. 随机控制理论．上海：上海交通大学出版社，28～30

Wu Rang quan. 1985. Stochastic differential equations. Boston：Pitman advanced Publishing program, 51～52, 56～63, 80～83

A KIND OF RANDOM MODELS

Guo Zijun

(Dept. of Basic Courses, South China Agr. Univ., Guangzhou, 510642)

Abstract

A kind of random model with infulence of stochastic elements is presented in this paper, and the SDE′model of″ group Growth″ studied.

Key words　mathematical models; differential equations; stochastic differential equations; solution; expectation; variance