

半序线性空间的对偶定理*

王石安 余彩玉

(华南农业大学理学院, 广州, 510642)

摘要 研究右序对偶半序线性空间中两个不同的 Mackey 邻域的对偶, 给出一类对偶定理的一般形式, 削弱了关于序凸与可分解, 绝对序凸与绝对序控及正序凸与正控的对偶定理的某些条件并简化了其证明.

关键词 右序对偶; 对偶定理; 圆凸 $\tau(E, F)$ -邻域

中图分类号 O177.3

设 (E, E_+) 为半序线性空间, E 中子集 V 称为序凸 (相应地, 可分解, 绝对序凸, 绝对序控, 正序凸, 正控), 如果 $F(V) \subset V$ (相应地, $V \subset D(V)$, $S(V) \subset V$, $V \subset S(V)$, $F_p(V) \subset V$, $V \subset D_p(V)$), 其中集映射 F, D, S, F_p, D_p 分别定义如下:

$$F(V) = (V - E_+) \cap (V - E_-),$$

$$D(V) = \{x \in V: x = \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2, \lambda \in [0, 1], x_1, x_2 \in E_+\},$$

$$S(V) = \{[-u, u] : u \in E_+\},$$

$$F_p(V) = (V - E_+) \cap E_+,$$

$$D_p(V) = \bigcap_{u \in E_+} E_+ - E_+.$$

并且, 我们还定义

$$B(V) = \{[-u, w] : u, w \in \bigcap_{u \in E_+} E_+\}$$

Ng (1971), Ng 等 (1973), Wong (1976) 及林金桢 (1983) 所给出的对偶定理仅仅描述一个 Mackey 邻域的对偶关系. 林金桢 (1989) 研究了半序局部凸空间 E 中两个不同的 $f(E, E')$ -邻域的对偶. 本文将研究右序对偶半序线性空间 (E, E_+) 和 (F, F_+) 中两个不同的 $f(E, F)$ -邻域的对偶, 并得出一类对偶定理的统一形式. 我们的证明仅基于双集定理, 从而显得简单. 而且, 作为推论, 在较弱的条件下得到 Wong (1976, 1994) 中的某些结果.

本文使用 Wong (1976, 1994) 中的符号, 并总假设 (E, E_+) 和 (F, F_+) 是构成右序对偶的半序线性空间. 对 E 中的子集 A , $\bar{A}$ 表示 A 的弱闭包, 而对 E 中的吸收集 A , 记

$$A_1 = \{x \in E : P_A(x) < 1\} \text{ 及 } A_c = \{x \in E : P_A(x) \leq 1\},$$

其中 P_A 是 A 的度规.

1 引理及对偶定理

在给出对偶定理之前, 我们需要如下结果.

引理 1 (Wong, 1976) 设 W 和 V 是半序线性空间 (E, E_+) 的子集, 下列断言成立

1995-09-15 收稿

* 校长基金资助课题

(1) 集映射 F, D, S, F_P, D_P 在集包含意义下是递增的, 即, 若 $V \subset W$, 则 $L(V) \subset L(W)$, 其中 L 表示集映射 F, D, S, F_P, D_P 之一.

(2) 若 V 是对称的, 则

$$B(V) = F(D(V)) = \{- (V \cap E_+)^+ \cap D_P(V)\}.$$

(3) 若 V 是对称凸的, 则

$$D(V) \subset D(F(V)) \subset S(V) \subset B(V) \subset F(V).$$

设 $\langle L, L' \rangle$ 表示偶对 $\langle F, D \rangle$, $\langle D, F \rangle$, $\langle S, S \rangle$ 和 $\langle D_P, F_P \rangle$ 之一, 则我们有如下称之为上对偶定理的结果.

定理 A (Wong, 1994) 设 (E, E_+) 和 (F, F_+) 是构成右序对偶的半序线性空间. V 是 E 中零点圆凸 $f(E, F)$ -邻域, 则

$$L'(V^\circ) = (L(V))^\circ,$$

此时, $\langle L, L' \rangle$ 称为上偶对.

引理 2 设 (E, E_+) 和 (F, F_+) 是构成右序对偶的半序线性空间. V 是 E 中零点圆凸 $f(E, F)$ -邻域, U 是 E 中的子集, 具有性质 (A): 对任何 $x \in U$, 存在 $\lambda > 1$, 使 $\lambda x \in U$. 则

(1) $V_c = V$.

(2) 若 $U \subset V$, 则 $U \subset V \subset V$.

特别, 若 U 也是 E 中零点圆凸 $f(E, F)$ -邻域, 则 $U_1, F(U_1), D(U_1), S(U_1), F_P(U_1)$ 和 $D_P(U_1)$ 均具有性质 (A). 从而若它们之一包含于 V , 则必包含于 V_1 .

定理 1 设 (E, E_+) 和 (F, F_+) 是构成右序对偶的半序线性空间, U 和 V 是 E 中零点圆凸 $f(E, F)$ -邻域, 若 $\langle L, L' \rangle$ 为一上偶对, 如下断言成立.

I (1) $L'(V^\circ) \subset U^\circ$; (2) $U_c \subset \overline{L(V_c)}$; (3) $U_c \subset \overline{L(V)}$; (4) $U \subset L(V_1)$, 则 (4) $\Rightarrow$ (1)

$\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). 若 $L(V_1)$ 还是 E 中零点 $f(E, F)$ -邻域, 则 (1) $\Rightarrow$ (4).

II (1) $L'(V^\circ) \supset U^\circ$; (2) $U_c \supset \overline{L(V_c)}$; (3) $U_c \supset \overline{L(V)}$; (4) $U \supset L(V_1)$, 则 (4) $\Rightarrow$ (1)

$\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). 若 $L(V_1)$ 还具有性质 (A), 则 (1) $\Rightarrow$ (4).

III (1) $L'(V^\circ) = U^\circ$; (2) $U_c = \overline{L(V_c)}$; (3) $U_c = \overline{L(V)}$; (4) $U = L(V_1)$, 则 (4) $\Rightarrow$ (1)

$\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). 若 $L(V_1)$ 还是 E 中零点 $f(E, F)$ -邻域, 则 (1) $\Rightarrow$ (4).

证明 I 设 (2), (3) 或 (4) 成立, 则

$$(\overline{L(V_c)})^\circ \subset U_c^\circ, (\overline{L(V)})^\circ \subset U_c^\circ \text{ 或 } (L(V_1))^\circ \subset U_1^\circ.$$

由于 $U_c^\circ = U_1^\circ = U^\circ$, 且 $(\overline{L(V_c)})^\circ = (L(V_1))^\circ = (\overline{L(V)})^\circ = L'(V^\circ)$, 从而 $L'(V^\circ) \subset U^\circ$. 这就证明了 (2), (3) 或 (4) 可推出 (1).

反过来, 设 (1) 成立, 则由双集引理得

$$\begin{aligned} U_c &= U^\circ \subset (L'(V^\circ))^\circ = L(V_c)^\circ = \overline{L(V_c)} = \\ &= (L(V))^\circ = \overline{L(V)} = \\ &= (L(V_1))^\circ = \overline{L(V_1)}, \end{aligned}$$

从而, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 成立, 而且, $U \subset U_c \subset \overline{L(V_1)}$, 若 $L(V_1)$ 是 E 中零点 $f(E, F)$ -邻域, 则由引理 2 知, $U \subset L(V_1)$, 这就证明了 (1) $\Rightarrow$ (4).

II 同理可证. 而 III 可由 I 和 II 得到.

2 推论及注

许多已知结果在较弱条件下可由定理 1 推出, 为简便计, 我们省略其证明.

推论 1 (林金桢, 1983) 设 (E, E^+) 和 (F, F^+) 是构成右序对偶的半序线空间. V 是 E 中零点圆凸 $f(E, F)$ -邻域, 如下断言成立.

$$(1) V^\circ = D(V^\circ) \Leftrightarrow V_1 = F(V_1) \not\Rightarrow V_c = \overline{F(V_c)} \not\Rightarrow V_c = F(V_c)$$

$$(2) V^\circ = F(V^\circ) \Leftrightarrow V_c = \overline{D(V_c)} \Leftrightarrow V_c = \overline{D(V)}, \text{ 若 } D(V_1) \text{ 是 } E \text{ 中零点开 } f(E, F)\text{-邻域, 则 } V^\circ = F(V^\circ) \Leftrightarrow V_1 = D(V_1).$$

推论 2 设 (E, E^+) 和 (F, F^+) 是构成右序对偶的半序线空间. V 是 E 中零点圆凸 $f(E, F)$ -邻域, 如下断言成立.

$$(1) V^\circ \subset S(V^\circ) \Leftrightarrow V \supset S(V_1) \Leftrightarrow V_c \supset \overline{S(V_c)} \Leftrightarrow V_c \supset \overline{S(V)},$$

$$(2) V^\circ \supset S(V^\circ) \Leftrightarrow V_c \subset \overline{S(V_c)} \Leftrightarrow V_c \subset \overline{S(V)}, \text{ 若 } S(V_1) \text{ 是 } E \text{ 中零点开 } f(E, F)\text{-邻域, 则 } V^\circ \supset S(V^\circ) \Leftrightarrow V_1 = S(V_1).$$

$$(3) \text{ 若 } S(V_1) \text{ 是 } E \text{ 中零点开 } f(E, F)\text{-邻域, 则 } V^\circ = S(V^\circ) \Leftrightarrow V_1 = S(V_1).$$

注 1. 若 V 是圆凸的, 则由引理 1 知, $D(V) \subset S(V)$, 所以, 若 $D(V)$ 是 E 中零点 $f(E, F)$ -邻域, 则 $S(V)$ 也是, 但反之不然. 因而推论 2 中的假设比 Ng 等 (1973) 和 Wong (1976, 定理 1. 1. 10) 中的弱.

推论 3 设 (E, E^+) 和 (F, F^+) 是构成右序对偶的半序线空间. V 是 E 中零点圆凸 $f(E, F)$ -邻域, 如下断言成立.

$$(1) V^\circ \text{ 正控} \Leftrightarrow V_1 \text{ 正序凸} \Leftrightarrow V_c \text{ 正序凸}.$$

$$(2) \text{ 若 } D_P(V) \text{ 是零点 } f(E, F)\text{-邻域, 则 } V^\circ \text{ 正序凸} \Leftrightarrow V_1 \text{ 正控}.$$

注 2 若 V 是圆凸的, 则由引理 1 知, $D(V_1) \subset D(V) \subset B(V) \subset D_P(V)$, 所以, 若 $D(V_1)$ 是 E 中零点 $f(E, F)$ -邻域, 则 $D_P(V)$ 也是, 但反之不然, 因而推论 3 中的假设比 Wong (1976) 中的弱.

Wong (1976) 在是 E 中零点 $f(E, F)$ -邻域的条件下证明了如下结果, 我们将证明没有该条件也成立.

推论 4 设 (E, E^+) 和 (F, F^+) 是构成右序对偶的半序线空间. V 是 E 中零点圆凸 $f(E, F)$ -邻域, 则

$$(D(F(V)))^\circ = F(S(V^\circ)).$$

证明 由引理 1 及定理 A 知

$$S(V^\circ) = S(V) \subset (D(F(V)))^\circ = F((F(V))^\circ),$$

因而, $F(S(V^\circ)) \subset F((F(V))^\circ)$. 另一方面, 由引理 1 及定理 A 知

$$S(V^\circ) = S(V) \supset (F(V))^\circ,$$

因而, $F(S(V^\circ)) \supset F((F(V))^\circ)$, 所以,

$$F(S(V^\circ)) = F((F(V))^\circ) = (D(F(V)))^\circ, \text{ 证毕.}$$

参 考 文 献

林金桢. 1983. 半序线性空间中的对偶定理. 科学通报, 28: 1346~ 1347

林金桢. 1989. 可分解定理注记. 中山大学学报, 28(1): 7~ 10

Ng K F. 1971. Solid sets in ordered topological vector spaces. Proc London Maths Soc, 22: 106~ 120

Ng K F, Duhoux M. 1973. The duality of ordered locally convex spaces. J London Maths Soc, 8(2): 201~ 208

Wong Y C. 1976. The topology of uniform convergence on order- bounded sets, Lecture Notes on Maths. 531. Berlin: Springer- Verlag, 7~ 20

Wong Y C. 1994. Some topics in functional analysis and operator theory. Beijing: Science Press, 278~ 288

DUALITY THEOREMS IN ORDERED VECTOR SPACES

Wang Shi'an Yu Caiyu

(College of Science, South China Agr. Univ., Guangzhou, 510642)

Abstract

Let (E, E_+) and (F, F_+) be partially ordered vector spaces which form an ordered duality on the right, the duality of two different $\tau(E, F)$ - neighborhood of 0 was studied, where $\tau(E, F)$ denotes the Mackey topology on E . A general form of a class of duality theorems was yielded. As corollaries some results were obtained on dualities of order-convex and decomposable, absolutely order-convex and absolutely dominated, and positively order-convex and positively dominated, but our assumptions were weaker and our proofs were more simple.

Key words ordered duality on the right; duality theorems; circled convex $\tau(E, F)$ - neighborhood