

二阶微分方程解的零点比较定理

庄容坤¹ 郭子君²

(1 惠州大学数学系, 广东惠州, 516015; 2 华南农业大学理学院)

摘要 通过建立微分恒等式, 研究二类非线性微分方程与线性方程之间解的零点比较定理及解的导函数的零点比较定理, 推广了一些已有的结论。

关键词 二阶非线性微分方程; 零点比较定理

中图分类号 O 175. 12

微分方程解的零点比较理论, 是微分方程定性理论研究的一个课题, 其结果用于进一步研究方程解的振动性。关于二阶线性微分方程解的零点比较定理, 已有较详细的讨论(邓宗琦, 1987; 程崇高, 1991)。更进一步, 本文研究二阶非线性微分方程与其对应的线性微分方程之间解的零点比较定理及解的导函数的零点比较定理。

1 二阶非线性微分方程

$$(p_1(t)x')' + r_1(t)x' + q_1(t)x = 0, \quad (1)$$

$$(p_2(t)y')' + r_2(t)y' + q_2(t)f(y) = 0, \quad (2)$$

$$(p_2(t)y')' + r_2(t)y' + q_2(t)y = g(y), \quad (3)$$

其中 $p_1(t), p_2(t), r_1(t), r_2(t), q_1(t), q_2(t) \in C^1[0, 1], p_2(t) > 0, t \in [0, 1], f(u), g(u) \in C(-\infty, +\infty)$ 。在研究(2), (3)与方程(1)的解的零点比较定理之前, 先建立下面的微分恒等式。

引理 1: 设 $y(t)$ 是方程(2)的非平凡解, 若 $y(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, 则成立下面恒等式:

$$\left[\frac{x}{y} (yp_1x' - xp_2y') \right]' = (p_1 - p_2)x'^2 + p_2 \left(\frac{r_2x}{2p_2} - x' + \frac{xy'}{y} \right)^2 + \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4p_2} \right) x^2 + (r_2 - r_1)xx'.$$

引理 2: 设 $y(t)$ 是方程(3)的平凡解, 若 $y(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, 则成立下面恒等式:

$$\left[\frac{x}{y} (yp_1x' - xp_2y') \right]' = (p_1 - p_2)x'^2 + p_2 \left(\frac{r_2x}{2p_2} - x' + \frac{xy'}{y} \right)^2 + \left(\frac{g(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4p_2} \right) x^2 + (r_2 - r_1)xx' - \frac{g(y)}{y}x^2.$$

引理 1 与引理 2 只需分别对等式的左端直接求导即可证得, 限于篇幅, 此处略去不证。

定理 1: 设 $t=0, t=1$ 是方程(1)的非平凡解 $x(t)$ 的两相邻零点, $p_1 \geq p_2 > 0, q_1 \geq q_2 + \frac{r_2^2}{4p_2} + \frac{r_2' - r_1'}{2}, t \in [0, 1]$ 且在 $[0, 1]$ 的任一子区间上等号不成立, 又 $\forall u \neq 0,$

$uf(u) \geq u^2$, 则方程(2)的非平凡解 $y(t)$ 在 $[0, 1]$ 内至少有一个零点。

证明: 若不然, 设 $y(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, 则由引理 1 有:

$$\left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' = (p_1 - p_2) x'^2 + p_2 \left(\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right)^2 + \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} \right) x^2 + (r_2 - r_1) x x',$$

从 0 到 1 积分得:

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' dt = \int_0^1 (p_1 - p_2) x'^2 dt + \int_0^1 p_2 \left(\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right)^2 dt + \int_0^1 \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} \right) x^2 dt + \int_0^1 (r_2 - r_1) x x' dt.$$

理之

由于 $x(0) = x(1)$, 故

$$\int_0^1 (r_2 - r_1) x x' dt = \frac{r_2 - r_1}{2} x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r_2' - r_1'}{2} x^2 dt = - \int_0^1 \frac{r_2' - r_1'}{2} x^2 dt, \text{ 从而:}$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' dt = \int_0^1 (p_1 - p_2) x'^2 dt + \int_0^1 p_2 \left(\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right)^2 dt + \int_0^1 \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} - \frac{r_2' - r_1'}{2} \right) x^2 dt;$$

又由于:

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' dt = \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right] \Big|_0^1 = 0, \quad (2)$$

从而:

$$\int_0^1 (p_1 - p_2) x'^2 dt + \int_0^1 p_2 \left(\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right)^2 dt + \int_0^1 \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} - \frac{r_2' - r_1'}{2} \right) x^2 dt = 0.$$

但由已知条件知: 上面恒等式的左边大于零, 从而产生矛盾, 故 $y(t)$ 在 $[0, 1]$ 内至少有一个零点。

定理 2: 设 $x(t)$ 是方程(1)的满足 $x(0) = x'(a) = 0, a \in (0, 1)$ 的非平凡解, $r_2 \geq r_1$, 其它条件同定理 1, 则方程(2)的满足 $y(0) = 0$ 的非平凡解 $y(t)$ 的导函数 $y'(t)$ 在 $(0, a)$ 有一个零点。

证明: 若有 $0 < t_1 \leq a$ 使 $y(t_1) = 0$, 由罗尔定理知: 存在 $\tau \in (0, 1)$ 使 $y'(\tau) = 0$, 定理显然成立。

现设 $y(t) \neq 0, t \in (0, a)$, 则由引理 1 有:

$$\left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' = (p_1 - p_2) x'^2 + p_2 \left(\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right)^2 + \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} \right) x^2 + (r_2 - r_1) x x' \geq$$

从 0 到 α 积分得:

$$\int_0^a \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' dt = \int_0^a (p_1 - p_2) x'^2 dt + \int_0^a p_2 \left(\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right)^2 dt + \int_0^a \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} \right) x^2 dt + \int_0^a (r_2 - r_1) x x' dt$$

由于 $x(0)=0$, 故

$$\int_0^a (r_2 - r_1) x x' dt = \frac{r_2(\alpha) - r_1(\alpha)}{2} x^2(\alpha) - \int_0^a \frac{r_2' - r_1'}{2} x^2 dt;$$

又由于

$$\int_0^a \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' dt = -p_2(\alpha) \frac{x^2(\alpha) y'(\alpha)}{y(\alpha)},$$

从而

$$\begin{aligned} -p_2(a) \frac{x^2(a) y'(a)}{y(a)} &= \left(\int_0^a (p_1 - p_2) x'^2 dt + \int_0^a p_2 \left[\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right]^2 dt \right. \\ &\left. + \int_0^a \left[q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} - \frac{r_2' - r_1'}{2} x^2 dt + \frac{r_2(a) - r_1(a)}{2} x^2(a) \right] \right) y \end{aligned}$$

由已知条件知: 上面等式的左边大于零, 从而

$$-p_2(a) \frac{x^2(a) y'(a)}{y(a)} > 0,$$

从而 $y'(\alpha)$ 与 $y(\alpha)$ 反号, 无妨设 $y(t) > 0$, $t \in (0, \alpha)$, 则有 $y'(0) > 0$, $y'(\alpha) < 0$, 由 $y'(t)$ 的连续性知: 存在 $\tau \in (0, \alpha)$ 使 $y'(\tau) = 0$.

定理 3: 设 $t=0$, $t=1$ 是方程 (1) 的非平凡解 $x(t)$ 的两相邻零点, $p_1 \geq p_2 > 0$, $q_2 \geq q_1 + \frac{r_2^2}{4 p_2} + \frac{r_2' - r_1'}{2}$, $t \in [0, 1]$, 且在 $[0, 1]$ 的任一子区间上等号不成立, 又 $\forall u \neq 0$, $u g(u) \leq 0$, 则方程 (3) 的非平凡解 $y(t)$ 在 $[0, 1]$ 内至少有一个零点.

证明: 若不然, $y(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$, 则由引理 2 有:

$$\begin{aligned} \text{由于 } \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' &= \left(p_1 - p_2 \right) x'^2 + p_2 \left[\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right]^2 + \left(q_2 - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} \right) x^2 + \\ &+ (r_2 - r_1) x x' - \frac{g(y)}{y} x^2, \end{aligned}$$

从 0 到 1 积分得:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' dt &= \int_0^1 \left(p_1 - p_2 \right) x'^2 dt + \int_0^1 p_2 \left[\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right]^2 dt + \\ &+ \int_0^1 (r_2 - r_1) x x' dt - \int_0^1 \frac{g(y)}{y} x^2 dt. \end{aligned}$$

由于 $x(0) = x(1) = 0$, 故

$$\int_0^1 (r_2 - r_1) x x' dt = \frac{r_2 - r_1}{2} x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r_2' - r_1'}{2} x^2 dt = - \int_0^1 \frac{r_2' - r_1'}{2} x^2 dt,$$

从而:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' dt &= \int_0^1 \left(p_1 - p_2 \right) x'^2 dt + \int_0^1 p_2 \left[\frac{r_2 x}{2 p_2} - x' + \frac{x y'}{y} \right]^2 dt + \\ &+ \int_0^1 \left(q_2 - q_1 - \frac{r_2^2}{4 p_2} - \frac{r_2' - r_1'}{2} \right) x^2 dt - \int_0^1 \frac{g(y)}{y} x^2 dt. \end{aligned} \geq$$

显然, 由已知条件知: 上面等式的右边大于零, 但等式的左端:

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right]' dt = \left[\frac{x}{y} (y p_1 x' - x p_2 y') \right] \Big|_0^1 = 0,$$

产生矛盾, 故 $y(t)$ 在 $[0, 1]$ 内至少有一个零点.

定理 4: 设 $x(t)$ 是方程 (1) 的满足 $x(0) = x'(\alpha) = 0$, $\alpha \in (0, 1)$ 的非平凡解, $r_2 \geq r_1$, 其

它条件同定理 3, 则方程(3)的满足 $y(0)=0$ 的非平凡解 $y(t)$ 的导函数 $y'(t)$ 在 $(0, \alpha)$ 有一个零点。

定理 4 的证法与定理 2 的证法类似, 略去不证。

注 1: 当 $f(u) \equiv u, p_1 = p_2 \equiv 1, r_1 = r_2 \equiv 0$ 时, 定理 1 为 Sturm 比较定理(邓宗琦, 1987)。

注 2: 当 $f(u) \equiv u, r_1 = r_2 \equiv 0$ 时, 定理 1 为 Sturm-picone 比较定理(邓宗琦, 1987)。

注 3: 当 $f(u) \equiv u, p_1 = p_2 \equiv 1, r_1 = r_2 \equiv 0, \int_0^1 (q_2 - q_1 x^2) dt > 0$ 时, 定理 1 为 Sturm-Leighton 比较定理(邓宗琦, 1987)。

注 4: 当 $f(u) \equiv u, r_1 = r_2 \equiv 0, \int_0^1 [(p_1 - p_2) x'^2 + (q_2 - q_1 x^2) dt] > 0$ 时, 定理 2 为 Sturm-Leighton 关于解的导函数的比较定理(邓宗琦, 1987)。

2 特殊情形

当 $r_1 = r_2 \equiv 0$ 时, 方程(1), (2), (3)退化为:

$$\begin{cases} p_1(t)x'' + q_1(t)x = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2(t)y'' + q_2(t)y = 0, & (5) \end{cases}$$

$$(\alpha) \begin{cases} p_2(t)y'' + q_2(t)y' = g(y), & (6) \end{cases}$$

此时还有更深入的结果。首先建立下列引理。

引理 3: 设 $y(t)$ 是方程(5)的非平凡解, 若 $y'(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, 则成立下面恒等式:

$$\int_0^1 \left[\frac{p_1 x'}{p_2 y'} (p_1 x' y - p_2 x y')' - q_2 \left(\frac{p_1 x' y - p_2 x y'}{p_2 y'} \right)^2 + \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 \right) \left(\frac{p_1 x' y}{p_2 y'} \right)^2 + \frac{p_1(p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 \right] dt = 0.$$

引理 4: 设 $y(t)$ 是方程(6)的非平凡解, 若 $y'(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, 则成立下面恒等式:

$$\int_0^1 \left[\frac{p_1 x'}{p_2 y'} (p_1 x' y - p_2 x y')' - q_1 \left(\frac{p_1 x' y - p_2 x y'}{p_2 y'} \right)^2 + (q_2 - q_1) \left(\frac{p_1 x' y}{p_2 y'} \right)^2 + \frac{p_1(p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 - (p_1 x')^2 y g(y) \right] dt = 0.$$

引理 3 与引理 4 只需分别对等式的左边直接求导并适当配方即可证得, 限于篇幅, 此处略去不证。

定理 5: 设 $t=0, t=1$ 是方程(4)的非平凡解 $x(t)$ 的导函数 $x'(t)$ 的两相邻零点, 若 $\int_0^1 \frac{p_1(p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 dt \geq 0, q_1 \geq q_2 > 0, \forall u \neq 0, u f(u) \geq u^2$, 则方程(5)的非平凡解 $y(t)$ 的导函数 $y'(t)$ 在 $[0, 1]$ 内至少有一个零点。

证明: 若不然, $y'(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, 则由引理 3 有:

$$\int_0^1 \left[\frac{p_1 x'}{p_2 y'} (p_1 x' y - p_2 x y')' - q_2 \left(\frac{p_1 x' y - p_2 x y'}{p_2 y'} \right)^2 + \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 \right) \left(\frac{p_1 x' y}{p_2 y'} \right)^2 + \frac{p_1(p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 \right] dt = 0.$$

从 0 到 1 积分得:

$$\int_0^1 \left[\frac{p_1 x'}{p_2 y} (p_1 x' y - p_2 x y') \right]' dt = \int_0^1 q_1 \left(\frac{p_1 x' y - p_2 x y'}{p_2 y} \right)^2 dt + \int_0^1 \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 \left(\frac{p_1 x'}{p_2 y} \right)^2 + \int_0^1 \frac{p_1 (p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 dt \right) dt.$$

由于 $x'(0) = x'(1) = 0$, 故

$$\int_0^1 \left[\frac{p_1 x'}{p_2 y} (p_1 x' y - p_2 x y') \right]' dt = 0, \quad d > 0$$

于是

$$\int_0^1 q_1 \left(\frac{p_1 x' y - p_2 x y'}{p_2 y} \right)^2 dt + \int_0^1 \left(q_2 \frac{f(y)}{y} - q_1 \left(\frac{p_1 x'}{p_2 y} \right)^2 + \int_0^1 \frac{p_1 (p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 dt \right) dt = 0.$$

但由已知条件知上式等号的左边大于零, 产生矛盾, 故 $y'(t)$ 在 $[0, 1]$ 内至少有一个零点。

定理 6: 设 $t=0, t=1$ 是方程(4)的非平凡解 $x(t)$ 的导函数 $x'(t)$ 的两相邻零点, 若

$$\int_0^1 \frac{p_1 (p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 dt \geq 0, \quad q_1 \geq q_2 > 0, \quad \forall u \neq 0, \quad u g(u) \leq 0, \quad \text{则方程(6)的非平凡解 } y(t) \text{ 的}$$

导函数 $y'(t)$ 在 $[0, 1]$ 内至少有一个零点。

证明: 若不然, $y'(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, 则由引理 4 有:

$$\left[\frac{p_1 x'}{p_2 y} (p_1 x' y - p_2 x y') \right]' = q_1 \left(\frac{p_1 x' y - p_2 x y'}{p_2 y} \right)^2 + (q_2 - q_1) \left(\frac{p_1 x'}{p_2 y} \right)^2 + \text{恒等}$$

$$\frac{p_1 (p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 - (p_1 x')^2 y g(y),$$

从 0 到 1 积分得:

$$\int_0^1 \left[\frac{p_1 x'}{p_2 y} (p_1 x' y - p_2 x y') \right]' dt = \int_0^1 q_1 \left(\frac{p_1 x' y - p_2 x y'}{p_2 y} \right)^2 dt + \int_0^1 (q_2 - q_1) \left(\frac{p_1 x'}{p_2 y} \right)^2 dt + \int_0^1 \frac{p_1 (p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 dt - \int_0^1 (p_1 x')^2 y g(y) dt.$$

由于 $x'(0) = x'(1) = 0$, 故

$$\int_0^1 \left[\frac{p_1 x'}{p_2 y} (p_1 x' y - p_2 x y') \right]' dt = 0,$$

于是

$$\int_0^1 q_1 \left(\frac{p_1 x' y - p_2 x y'}{p_2 y} \right)^2 dt + \int_0^1 (q_2 - q_1) \left(\frac{p_1 x'}{p_2 y} \right)^2 dt + \int_0^1 \frac{p_1 (p_1 - p_2)}{p_2} x'^2 dt - \int_0^1 (p_1 x')^2 y g(y) dt = 0.$$

但由已知条件知上式左边大于零, 产生矛盾, 故 $y'(t)$ 在 $[0, 1]$ 内至少有一个零点。

参 考 文 献

- 邓宗琦. 1987. 常微分方程边值问题和 Sturm 比较理论引论. 武汉: 华中师范大学出版社, 56~78
程崇高, 邓宗琦. 1991. 二阶线性齐次微分方程解的导函数 Sturm 比较定理. 华中师范大学学报 (自然科学版), (3): 267~270

ZERO POINT COMPARISON THEOREM OF SOLUTIONS FOR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zhuang Rongkun¹ Guo Zijun²

(1 Dept. of Mathematics, Huizhou Univ., Huizhou, Guangdong, 516015;

2 College of Science, South China Agr. Univ.)

Abstract

Studied the point comparison theorem of solutions for two classes of nonlinear differential equation by establishing differential identity and generalized some known results.

Key words second order nonlinear differential equations; zero point comparison theorems

简 讯

柑桔黄龙病病原培养及免疫诊断成果通过农业部鉴定

柑桔黄龙病是一种毁灭性病害, 为了使黄龙病的发生得到有效的控制, 必须有一套准确快速的诊断方法。柑桔黄龙病病原菌的培养是国际植病研究中的难题。由华南农业大学林学院张景宁教授主持, 广东省科委、广东省农委下达的“柑桔黄龙病病原培养及免疫诊断”课题, 经过 10 余年的研究, 首先在其病原菌培养上取得成功, 其培养菌形态有高度的重复性, 而且完成了整个柯赫氏法则。再进一步根据柑桔黄龙病印度株的 16SrRNA 的序列, 设计合成一对特异性引物, 对分别从培养菌及病株中病原菌提取的 DNA 进 PCR 扩增, 均得到相同的特异性区带, 与理论值一致, 对病原菌的培养成功作了进一步的确认。并根据培养菌形态及 PCR 扩增的结果, 认为柑桔黄龙病的病原是一种新型的细菌。

以培养成功的病原菌为基础, 制成多克隆抗体及单克隆抗体, 以不同的化学物质标记, 创立四种诊断方法。用辣根过氧化物酶标记抗体, 联苯二氨显色, 创立酶联免疫吸附分析法及酶标定位法; 以胶体金标记抗体, 创立胶体金—银免疫检测法, 该方法比上述方法更快速、更准确, 可消除植物内源酶对染色效果的影响; 以制备的抗体作第一抗体, 异硫氰荧光素 (FITC) 标记的 IgG 作第二抗体, 配合荧光显微镜作病原菌定性的荧光抗体检测及用激光共焦扫描显微镜作定域扫描, 对病原菌的分布浓度作定量的检测。

对柑桔黄龙病病原培养及免疫诊断研究的上述成果, 于 1997 年 1 月 10 日在深圳通过农业部组织的鉴定。与会的中国农科院及其他单位的同行专定一致认为, 该成果达国际领先水平, 在生产上有重大的实际意义。可进一步开发试剂盒, 应用于检疫、果园管理、无毒苗生产等, 同时也可配合基因工程技术进行抗病品种的培育。将可从根本上解决柑桔黄龙病这一难题并带来巨大的经济效益。(张景宁、刘仲健、黄自然供稿)