华南农业大学学报　　19(4)　1998:98～100
J. South China Agric. Univ.

# 萃取效率定律的证明

陈　立　徐汉虹
(华南农业大学昆虫毒理研究室,广州,510642)

摘要　根据分配定律提出了萃取效率定律,并根据极限法则和拉格朗日中值定理对萃取效率定律进行了证明.

关键词　萃取;萃取效率;萃取效率定律;证明
中图分类号　O64

萃取是从溶液中分离出某一组分的一种物理方法,它的理论基础是分配定律,即"在定温定压下,如果一个物质溶解在两个同时存在的互不相溶的液体里,达到平衡后,该物质在两相中浓度之比等于常数"(吉林大学,1975).萃取作为一种分离方法,在稀有金属的冶炼、燃料原料的浓缩以及生物和医药制品的纯化方面,有着广泛的应用.尤其在药物学研究领域,生物活性成分的分离提纯更离不开萃取.例如从川楝(*Melia toosendan*)皮的沸水浸提液中分离杀虫有效成分川楝素(toosendanin)的方法就是用氯仿萃取(钟朝杰等,1981).人们总希望用最少的溶剂最大程度地萃取出有效成分,这就涉及到萃取效率的问题.

## 1　萃取效率定律的提出

许多物理化学方面的书籍均有对萃取效率问题的计算和讨论.例如,用作萃取的溶剂量有限时,分成若干份进行多次萃取,其效果必然要比用全部溶剂进行一次萃取好得多(吉林大学,1975);如果用作萃取的溶剂数量有限时,则将溶剂分为若干份,分批萃取的效率要比用溶剂一次萃取的效率高(傅献彩等,1979);如果所用作萃取的一定量的溶剂分成若干次来进行萃取,其抽提的效果要比把溶剂一次用完来萃取好得多(华南农学院,1981).用公式表达如下:

$$\frac{W_n}{W_1}=\frac{W[\mathrm{K}V_1/(\mathrm{K}V_1+V_2)]^n}{W[\mathrm{K}V_1/(\mathrm{K}V_1+nV_2)]}=\frac{1+nV_2/\mathrm{K}V_1}{(1+V_2/\mathrm{K}V_1)^n}<1\ . \tag{1}$$

式中 $V_1$——某溶液体积;$V_2$——用于萃取的另一互不相溶溶剂的体积;K——分配常数;$W$——$V_1$mL溶液所含某组份 i 的量;$W_1$——用体积为 $nV_2$mL 的溶剂进行一次萃取后组份 i 的剩余量;$W_n$——每次用体积为 $V_2$ 的溶剂进行 $n$ 次萃取后组份 i 的剩余量.

其实,这只是萃取效率的特殊形式,即把 $n$ 次萃取效果和一次萃取效果作比较,而萃取效率还有其一般形式——萃取效率定律.

如果用作萃取的一定量的溶剂分成若干份进行多次萃取,次数越多萃取效果越好.这就是萃取效率定律.

1998—02—13 收稿　　陈　立,男,25岁,理学硕士,博士研究生

## 2　萃取效率定律的数学证明

假设现有一有机溶剂 A 从另一极性溶剂 B 的溶液中抽提其中有用的溶质,假定该溶质在这 2 种溶剂中没有缔合、离解、化学变化等作用. 设在体积为 $V_B$ 的溶液中溶质含量为 $W_0$,溶剂 A 的总量为 $V_A$,在每次抽提中其用量为 $V_A/n$,经过 $n$ 次抽提后,溶液中溶质残留量为 $W_n$.

由分配定律可得,用溶剂 A 一次萃取得 $W_1/W_0=V_B/(V_B+KV_A)$ (K 为分配常数,与(1)式中的 K 互为倒数);用溶剂 A 分 $n$ 次萃取得 $W_n/W_0=[V_B/(V_B+KV_A/n)]^n$,即 $W_0/W_n=(1+KV_A/nV_B)^n$. 这里 K、$V_A$、$V_B$、$W_0$ 都是常数,由此知 $W_n$ 是自然数 $n$ 的函数. 由于 $KV_A/V_B$ 是一个常数,我们不妨造一个函数 $y=f(x)=(1+1/x)^x$,只要证明它在 $(0,+\infty)$ 上是一个增函数,就可知 $n$ 越大,$W_0/W_n$ 越大,萃取效果越好.

很显然 $y=f(x)=(1+1/x)^x$,在 $(0,+\infty)$ 上是可导的,对它求导得:

$$y'=(1+1/x)^x[\ln(1+1/x)-1/(x+1)].$$

已知当 $x>0$ 时,有 $1+1/x>0$,进而有 $(1+1/x)^x>0$.

故只要证明 $\ln(1+1/x)-1/(x+1)>0$,即可知 $y'>0$,从而证明函数 $y=(1+1/x)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

### 2.1　根据极限法则(同济大学应用数学系, 1987)证明

不妨设函数 $t=\ln(1+1/x)-1/(x+1)$ [它在 $(0,+\infty)$ 上是可导的],则:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0,$$

$$t'=\frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)^2}<0\ .$$

故函数 $t=\ln(1+1/x)-1/(x+1)$ 是减函数. 又因它的极限为 0,所以在 $(0,+\infty)$ 上有 $\ln(1+1/x)-1/(x+1)>0$.

因此知 $y=(1+1/x)^x$ 的导数 $y'=(1+1/x)^x[\ln(1+1/x)-1/(x+1)]>0$,函数 $y=(1+1/x)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数得证.

### 2.2　根据拉格朗日中值定理(同济大学应用数学系, 1987)证明

设 $t=1/x$,则 $\ln(1+1/x)-1/(x+1)$ 变为 $\ln(1+t)-t/(1+t)$,其中 $t\in(0,+\infty)$.

又设函数 $f(t)=\ln(1+t)$,显然 $f(t)$ 在区间 $[0,t]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,根据定理应有:

$$f(t)-f(0)=f'(\zeta)(t-0),\ 其中\ 0<\zeta<t.$$

由于 $f(0)=0$, $f'(t)=1/(1+t)$,因此上式即为 $\ln(1+t)=t/(1+\zeta)$.

又由 $0<\zeta<t$,有 $t/(1+t)<t/(1+\zeta)<t$,即 $t/(1+t)<\ln(1+t)<t$,

所以 $\ln(1+t)-t/(1+t)>0$,也就是 $\ln(1+1/x)-1/(x+1)>0$.

因此知 $y=(1+1/x)^x$ 的导数 $y'=(1+1/x)^x[\ln(1+1/x)-1/(x+1)]>0$,函数 $y=(1+1/x)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数得证.

由于系数 $KV_A/V_B$ 不影响函数 $f(x)=(1+1/x)^x$ 的单调性,故当 $n$ 取自然数时,$W_0/W_n=(1+KV_A/nV_B)^n$ 随着 $n$ 的增大而增大,即萃取次数越多,效果越好.

## 3 最大萃取效率(maximum of extracting efficiency, $E_{max}$)的计算

萃取效率 $E=\frac{W_0-W_n}{W_0}=1-\frac{W_n}{W_0}=1-\frac{1}{(1+\mathrm{K}V_A/nV_B)^n}$.

最大萃取效率 $E_{max}=\lim\limits_{n\to+\infty}E=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(1+\mathrm{K}V_A/nV_B)^n}\right]$

$$=1-\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\mathrm{K}V_A/nV_B)^n}=1-\frac{1}{e^{\mathrm{K}V_A/V_B}}=1-e^{-\mathrm{K}V_A/V_B}$$

可见最大萃取率与分配常数K和用于萃取的有机溶剂的体积 $V_A$ 有关.

### 参 考 文 献

吉林大学. 1975. 物理化学基本原理(上册). 北京: 人民教育出版社, 126~130

同济大学应用数学系. 1987. 高等数学(上册). 第3版. 北京: 高等教育出版社, 1~106, 245~249

华南农学院. 1983. 物理化学. 北京: 农业出版社, 97~99

钟朝杰, 陈云彩, 顾月翠. 1981. 连续溶剂萃取法从川楝皮水浸液中提取川楝素. 中草药, 12(2): 14~17

傅献彩, 陈瑞华. 1979. 物理化学(上册). 第3版. 北京: 人民教育出版社, 265~268

## DEMONSTRATION OF LAW OF EXTRACTING EFFICIENCY

Chen Li Xu Hanhong

(Lab. of Insect Toxicology, South China Agric. Univ., Guangzhou, 510642)

**Abstract**

A law of extracting efficiency was put forward according to the law of distribution, and demonstrated with limitation regulation and Lagrange's middle value theorem.

**Key words** extraction; extracting efficiency; law of extracting efficiency; demonstration

[责任编辑 张 砺]