

四元数矩阵的中心化子

金玲玲

(华南农业大学理学院, 广州, 510642)

摘要 推广了数域上的矩阵中心化子理论, 得到了实四元数体矩阵上的中心化子理论.

关键词 实四元数体; 中心化子; 若当标准型

中图分类号 O 151. 2

近十几年来, 四元数体上的矩阵理论在我国获得了众多学者的关注, 并得到一批较好的结果(谢邦杰, 1982). 自然而然人们都想将现有的数域上矩阵理论推广到四元数体上, 数域方阵的中心化子理论是一个完美的结论(李乔, 1988), 本文将此结论推广到四元数体上, 给出了四元数体矩阵的中心化子的刻画.

设 R 是实数域, $H_R = R \oplus R_i \oplus R_j \oplus R_k$ 实四元数体, 其中 $ij = -ji = k$, $i^2 = j^2 = -1$, 复数域 $C = R \oplus R_i$, 为 H_R 的极大子域, H_R 表示 H_R 上 $n \times n$ 矩阵的集合. 设 $A \in H_R^{n \times n}$, A_c 表示 A 的复表示矩阵, 其定义及性质详见黄礼平(1994).

定义 设 $A \in H_R^{n \times n}$, 所有与 A 乘法可交换的 $H_R^{n \times n}$ 上方阵 X 的全体构成的集合称为 A 的中心化子, 记为 $C(A)$ 即 $C(A) = \{X | AX = XA, X \in H_R^{n \times n}\}$.

1 引理

以下设 $J_m(\lambda)$ 为对应于 λ 的 m 阶 Jordan 块

$$A^T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m}$$

显然 $J_m(\lambda) = \lambda I_m + H_m$, 其中 I_m 为 m 阶单位阵, H_m 形如

$$H_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

引理 1 设 $A \in H_R^{n \times n}$ 则 A 相似于唯一一个 Jordan 形矩阵 J , 即 $A \sim J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \dots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$, 其中: $\lambda_s = \alpha_s + b_s i \in C$ $\alpha_s \in R, b_s \geq 0, s = 1, \dots, K$ 为 A_c 的特征值(通常意义下).

证明 由黄礼平(1994)之定理1知, 只须证明 λ_s 为 A_c 的特征值. 由复表示矩阵的性质见(黄礼平, 1994), 从 $A \sim J$ 可得到 $A_c \sim J_c = [J_{n_1}(\lambda_1)]_c \oplus \cdots \oplus [J_{n_k}(\lambda_k)]_c = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_1}(\bar{\lambda}_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k) \oplus J_{n_k}(\bar{\lambda}_k)$

故, $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k$ 为 A_c 的所有可能的特征值, 从而定理得证.

引理2 设 $A, B, D \in \mathbf{H}_R^{n \times n}$ 下列等价: (i) 四元数矩阵方程 $AX - XB = D$ 有唯一解; (ii) 复数矩阵方程 $A_c X - X B_c = D_c$ 有唯一解; (iii) A_c, B_c 没有公共的特征值.

证明 (i), (ii) 的等价性可仿 Huang (1998) 中定理6的证明, 这里略去, (i), (iii) 的等价性即为著名的 Roth 定理(黄礼平, 1994).

2 主要结论

设 $A \in \mathbf{H}_R^{n \times n}$, J_A 为 A 的若当标准型, 即有可逆矩阵 S 使得,

$S^{-1}AS = J_A = (\lambda_1 I_{p_1} + H_{p_1}) \oplus \cdots \oplus (\lambda_u I_{p_u} + H_{p_u})$ 其中 $p_1 + p_2 + \cdots + p_u = n$, λ_i 为 A_c 的虚数部大于零的特征值(引理1).

取 $X \in C(A)$, 则 $AX = XA \iff SJ_A S^{-1}X = XSJ_A S^{-1} \iff J_A(S^{-1}XS) = (S^{-1}XS)J_A$,

记 $Y = S^{-1}XS$, 因此只须讨论方程 $J_A Y = Y J_A$.

将矩阵 Y 按 J_A 的分块分块:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{u-11} & \cdots & Y_{u-1u} \\ Y_{u1} & \cdots & Y_{uu} \end{bmatrix},$$

其中 Y_{ij} 是 $p_i \times p_j$ 矩阵, $i, j = 1, 2, \dots, u$, 则方程 $J_A Y = Y J_A$ 等价于 u^2 个方程 $(\lambda_i I_{p_i} + H_{p_i}) Y_{ij} = Y_{ij} (\lambda_j I_{p_j} + H_{p_j})$, $i, j = 1, 2, \dots, u$.

当 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时, $(\lambda_i I_{p_i} + H_{p_i})_c$ 与 $(\lambda_j I_{p_j} + H_{p_j})_c$ 的特征值分别为 λ_i, λ_i 与 $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ 由于 λ_i, λ_j 的虚数部均大于零, 这样, $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_j, \bar{\lambda}_i \neq \lambda_j$, 故 $(\lambda_i I_{p_i} + H_{p_i})_c$ 与 $(\lambda_j I_{p_j} + H_{p_j})_c$ 的特征值不同, 这样由引理2即知 $Y_{ij} = 0$.

当 $\lambda_i = \lambda_j$ 时, 方程成为 $H_{p_i} Y_{ij} = Y_{ij} H_{p_j}$.

记 $Y_{ij} = (Y_{kl})_{p_i \times p_j}$ 则:

$$H_{p_i} Y_{ij} = \begin{bmatrix} y_{21} & \cdots & y_{2p_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{p_i 1} & \cdots & y_{p_i p_j} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad Y_{ij} H_{p_j} = \begin{bmatrix} 0 & y_{11} & \cdots & y_{1p_j-1} \\ 0 & y_{21} & \cdots & y_{2p_j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & y_{p_i 1} & \cdots & y_{p_i p_j-1} \end{bmatrix}.$$

这2个 $p_i \times p_j$ 矩阵相等当且仅当 Y_{ij} 有下列形状.

$$\begin{aligned}
 p_i = p_j \text{ 时, } Y_{ij} &= \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{p_i-1} \\ 0 & y_0 & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & y_1 \\ 0 & \cdot & \cdot & y_0 \end{bmatrix}_{p_i \times p_j} ; & p_i > p_j \text{ 时, } Y_{ij} &= \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{p_j-1} \\ 0 & y_0 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{p_i \times p_j} ; \\
 p_i < p_j \text{ 时, } Y_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_0 & y_1 & \cdots & y_{p_i-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & y_0 \end{bmatrix}_{p_i \times p_j} .
 \end{aligned}$$

证明

其中 $\min\{p_i, p_j\}$ 个参数 $y_0, y_1, \dots$, 可任取. 由此可知 $J_A Y - Y J_A = 0$ 的右线性无关解的个数等于 $\sum \min\{p_i, p_j\}$, 这里 $\sum$ 是对所有满足 $\lambda_i = \lambda_j (1 \leq i, j \leq \mu)$ 的整数对 (i, j) 求和. 以上结论可表达为如下定理.

定理 设 $\mathbf{H}_R$ 为实四元数体, $A \in \mathbf{H}_R^{n \times n}$, A 的 Jordan 型矩阵为 $J_A = J_{p_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{p_u}(\lambda_u)$, 则 A 的中心化子 $C(A) = \{X \in \mathbf{H}_R^{n \times n} \mid XA = AX\}$ 是 $\mathbf{H}_R$ 上 $\sum \min\{p_i, p_j\}$ 维右线性空间. 其中 $\sum$ 是对所有满足 $\lambda_i = \lambda_j (1 \leq i, j \leq \mu)$ 的整数对 (i, j) 求和.

推论 1 $\dim C(A) \geq n$.

证明 $\dim C(A) = \sum_{i,j=1}^u \min\{p_i, p_j\} \geq \sum_{i=1}^u \min\{p_i, p_j\} = \sum_{i=1}^u p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_u = n$.

推论 2 $\dim C(A) = n$ 的充分必要条件是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ 互不相同.

证明 在推论 1 的证明中, 等号成立 $\Leftrightarrow i \neq j$ 时, $\lambda_i = \lambda_j$ 即得证.

参 考 文 献

- 李 乔. 1988 矩阵论八讲. 上海: 上海科学技术出版社, 23~30
 黄礼平. 1994 四元数体上方阵的标准形与矩阵方程 $AX + XB = D$. 新疆大学学报(自然科学版), 11(1): 35~38
 谢邦杰. 1982 抽象代数学. 上海: 上海科学技术出版社, 78~386
 Huang Liping. 1998. The Quaternion Matrix Equation $\sum A^i \times B^i = E$. Acta Mathematica Sinica (New Series), 14(1): 91~98

THE CENTRALIZER OF REAL QUATERNION MATRIX

Jin Lingling

(College of Science, South China Agric. Univ., Guangzhou, 510642)

Abstract

The author generalized the results of the centralizer of matrix over complex number field to Real Quaternion field.

Key words Real Quaternion field; centralizer of matrix; Jordan canonical form 1991 MR subject classification

[责任编辑 张 砾]