华南农业大学学报　19(4)　1998: 104～107
J. South China Agric. Univ.

超越整函数 $f_u: z \to z\ \exp(z+u)$ 的动力性质

杨德贵　张国权
(华南农业大学理学院，广州 510642)

摘要　研究了超越整函数 $f_u(z)= z\ \exp(z+u)$(其中 u 为复参数)的动力学性质: 存在一无界正实数序列{Un}使得 $J\{f_{\mu_n}\} \neq D$, 同时对 $F(f_u)$ 的分支个数及 $J(f_u)$ 上淹没点的情况也作了较详细的研究.

关键词　复动力学; Julia 集; Fatou 集; 分支
中图分类号　O174.5

在过去的几十年里，复解析函数的动力性质的研究已得到较广泛地开展，但大多数的工作是集中在有理函数和多项式函数上，其他解析函数方面研究工作才在开始，仍有许多未解决的工作要做.

首先，我们介绍一下复解析动力学的一些定义和基本结果. 令 $f(z)$ 是非线性的整函数，f 的迭代序列记为:

$$f^0 \triangleq id,\ f^1 = f,\ \ldots f^{n+1} \triangleq f^n(f), \ldots.$$

点 z_0 被称为是 f 的 n 阶周期点，如果 $f^n(z_0) = z_0$ 且 $f^k(z_0) \neq z_0$，对所有 $K < n$，$(f^n)'(z_0)$ 被称为乘数，当周期为 1 时，这时我们把 z_0 称为 f 的不动点. 如果 $|(f^n)'(z_0)| < 1$ (或 > 1)，则 f 的 n 阶周期点 z_0 称为是吸性的(或斥性).

我们定义:

$F = F(f) = z \in D$: 函数序列{f^n} 在 z 点正规，$J = J(f) = D - F(f)$,

它们分别称为 f 的 Fatou 集和 Julia 集. 这里"正规"概念可参看 Schiff 等(1993). 根据定义我们很容易证明 F 是开集而 J 是非空的闭集. 且 f 的吸性周期点是包含在 $F(f)$ 里，f 的所有斥性周期点在 $J(f)$ 里是稠密的，Yang 等(1994)已证明.

$$J = f^{-1}(J) = f(J) \cup \{P\vee(f) \cap J\}, \quad F = f^{-1}(f) = f(F) \cup \{P\vee(f) \cap F\},$$

这里 $P\vee(f)$ 是指 f 的所有 Picand 例外值.

为了验证 Fatou 在 1926 年提出的存在一个超越整函数，它的 Julia 集是全复平面的猜想，Baker 等(1970)研究整函数 $f_u(z) = z\exp(z+u)$，这里 u 是复参数. 在本文我们将进一步研究含单复参数的超越整函数族 f_u.

1　分支和淹没点

f 是非线性整函数，如果 U 是 $F(f)$ 的分支，则 $f^n(U)$ 包含在 $F(f)$ 的某个分支内. 通常我们记 $U_n = f^n(U)$. 如果对所有的 $m \neq n$，$Un \neq Um$，则称 U 是游荡的，否则 U 被称为是周期的.

如果 U 是 $F(f)$ 的周期分支，则它必然是下面各种情况中之一.

(a)存在 $z_0 \in U$ 便得 $f^{np}|_u \to z_0$，当 $n \to \infty$，且 $f^p(z_0) = z_0$，$|(f^p)'(z_0)| < 1$. 这时我们称 U 为 Bottcher 域，如果 $(f^p)'(z_0) = 0$; U 被称为 Schroder 域，如果 $0 < |(f^p)'(z_0)| < 1$.

1998—02—20 收稿　　杨德贵，男，31 岁，讲师，硕士

(b)存在 $z_0\in\partial U$ 使得$f^{np}|u\to z_0$ 当 $n>\infty$. 且 $f^p(z_0)=z_0$, $(f^p)'(z_0)=1$ 这时 U 被称为 Leau 域.

(c) $f^{np}|U\to z_0$ 当 $n\to\infty$. 这时 U 被称为 Baker 域.

(d)从 U 到单位圆盘上存在一解析同胚 Φ, 使得 $\Phi\{f^p[\Phi^{-1}(z)]\}=e^{2\pi i\alpha z}$, $\alpha\in/R/Q$, U 被称为Siegel 盘.

J 的分支(或 J 上的点)被称为淹没支(或淹没点), 如果它不是 F 任何分支的边界点.

如果 $f'(z_0)=0$, 则 z_0 称为 f 的临界点, $f(z_0)$称为临界值, 如果存在一条趋向∞的曲线 Γ使得当 z 沿着 Γ趋于∞时, $f(z)\to a$, 则 a 称为f 的渐近值; 对于 f, 它的奇异值是指 f 的所有临床界值和渐近值, 以及它的极限点. 如果 f 只含有有限多个奇异点则f 被称为有限型. 本文所讨论的函数族 f_u 就是有限型.

2　两个结论及推导

定理 **2.1**　如果 $Reu<0$, 则 $F(f_u)$只有一个分支; 如果 $u\in[0,+\infty]$, 则 $F(f_u)$要么是空集, 要么有无穷多个分支, 并且所有的分支是单连通的.

为了证明定理 2.1, 我们需要下列引理.

引理 **2.1**(Eoumenko et al, 1990)　f 是有限型整函数, 则 $F(f)$没有游荡域, 它的周期分支只可能是: Bottcher 域, Schroder 域, Leau 域, Siegel 盘.

引理 **2.2**(Eoumenko et al, 1990)　每个 Bottccher 域或 Leau 域环至少包含一个奇异值. Sieggel 盘的边界属于所有奇异值前向轨道的闭包.

引理 **2.3**(Eoumenko et al, 1992)　f 是有限型整函数, 如果 $F(f)$有一完全不变分支 D, 则 $F(f)=D$.

引理 **2.4**(Eoumenko et al, 1990)　f 是超越整函数, 如果 $F(f)$的无界分支个数是非零有限数, 则个数为 1.

引理 **2.5**(Baker, 1975)　超越整函数 Fatou 集的任何非游荡分支都是单连通的.

引理 **2.6**(Bergweiler et al, 1995)　对任意超越整函数 f 及它的 Fatou 集的任意分支 U 和 V, 如果 $f(U)\subset V$, 则 $u\setminus f(u)$至多包含一个点, 且该点为 f 的渐近值.

引理 **2.7**　函数 $f_u(z)$没有 Picard 例外值且只有一个临界值 $f_u(-1)$和一个有限渐近值0.

证明　我们只需证明这个命题的第一个结论, 其余可参看 Baker 等(1970).

假定 f_u 有一个 Picard 例外值 a, 则存在两个非零常数 b 和 c 使得:

$$ze^{z+u}-a=be^{cz},$$

取 $z=0$, 则 $-a=b$, 因此,　$ze^{z+u}=-a(e^{cz}-1)$,

左边的函数只有一个零点, 而等式右边的函数有无穷多个零点, 矛盾.

证明(定理 2.1)　显然, $f_u(z)$是一个有限型的整函数, 它只有两个奇异值 0 和 $f_u(-1)$, $f_u(z)$只有不动点 0 和 $-u+2k\pi i$ $(k=0,\ \pm1\ \pm2\cdots)$. 且它们相应的乘积是 e^u 和 $-u+1+2k\pi i$. 如果 $Reu<0$, 则 $0<|f'_u(0)|<1$, 即点 $z=0$ 是 f_u 的一个吸性不动点. 令 D 为 $F(f_u)$含 0 的分支, 则 $0\in f_u(D)\cap D$; 根据引理 2.6 和引理 2.7, $f_u(D)=D_0$. 假设 D'是 $F(f_u)$的一个分支且 $f_u(D')=D$, 则存在一点 $z_0\in D'$使得 $f_u(z_0)=0$, 显然 $z=0$, 因此 D 是 $F(f_u)$的一个完全不变分支. 根据引理 2.3, $F(f_u)=D$. 因此 $F(f_u)$在 $Rell<0$ 时只有一个分支.

假设 $U\in[0,\infty]$ 和 $J(f_u)\neq D$, f_u 不动点 $-u+2k\pi i$ $(k=\pm1,\ \pm2\cdots)$是斥性不动点, 因此,

$$-u+2k\pi i\in J(f_u)\qquad(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots).\tag{1}$$

我们令 $S_n(u)=f_u\ \circ\ S_{n-1}(u)$, $n\in/N$, $S_o(u)=-1$, 则,

$$S_n(u)=f_u\ \circ\ S_{a+1}(u)=\frac{n}{u}(-1)<0.\tag{2}$$

奇异值的前向轨道落在实半轴$[-\infty, 0]$上, 由(1)式我们知在上, 下半平面上都有一些 Julia 集点. 从引理 2.2 我们得出 $F(f_u)$不含有 Siegel 盘, 再由引理 2.1 得 $F(f_u)$没有游荡域, 因此它是预周期的. 由引理 2.2 每个 Bottcher, Schroder, Leau 域至少含有一个奇异值, 从引理 2.1 我们得 $F(f_u)$只有一个预周期环$\{D_j\}_{j=0}^{P-1}$, 其中 D_j 是 P 个不同的分支, $f_u(D_j)=D_{j+1}(j=0, 1, \cdots P-2)$, $f_u(D_{P-1})=D_o$, $\quad f_u(-1)\in\bigcup_{j=0}^{p-1}D_j$;

因此 $f_u^{n+1}(-1)\rightarrow x_o\in\bigcup_{j=0}^{P-1}D_j$ 当 $n\rightarrow\infty$, 与$\{D_j\}_{j=0}^{P-1}$是 Schroder, Bottcher 或 Leau 域相应的, X_o 分别是吸性的, 超吸性的, 有理中性周期点.

从上面的讨论可知$\{f_u^n(-1)\}$所有的极限点位于$[-\infty, 0]$上, 因此 $X_o\leqslant0$, 显然, X_0 的所有前向轨道落于$(-\infty, 0]$, 因此:

$$\overline{D}_j\cap(-\infty, 0]\neq\Phi\qquad(j=0, 1, \cdots P-1),\tag{3}$$

下面我们证明$/R^+\ cJ(f_u)$. 假设存在一个正数 $X_1>0$ 使得 $X_1\in F(f_u)$, 由于 $F(f_u)$只有一个域循环链, $\{D_j\}_{j=0}^{P-1}$, 因此存在一个非负整数 m 使得 $f_u^m(-1)$和 $f_u(-1)$都属于某个域 D_j, 因此,

$$f_u^{m+np}\quad(X_1)\rightarrow X_o(n\rightarrow\infty),\tag{4}$$

在上面的讨论中我们已知 $X_o\leqslant0$, 且易得 $f_n^u(x_1)>x_1$ 对任意 $x>0$. 因此:

$f^{m\,p+n}_{\ \ u}(x_1)>x_1>0\ (n=1, 2, \cdots)$这与(4)式相矛盾, 即$/R^+\ cJ(f_u)$.

显然, 曲线 $X=-ycty$ 有无穷个分支(可以从曲线 $x=cty$ 的图象上看出). 在每个带状区域$\{z\mid kx<Imz<(K+1)\}$ $(K=0, \pm1, \pm2\cdots)$都有且只有一条分支, 我们且 Γ_1 和 Γ_2 分别表示位于$\{z\mid\pi<Imz<2\pi\}$和$\{z\mid-2\pi<Imz<-\pi\}$上的分支, 显然 Γ_1 向右无限趋于 $Y=2\pi$, 向左无限逼近 $Y=\pi$, 曲线 Γ_2 与 Γ_1 关于实轴对称, 用 H 表示这两条曲线围成的区域.

易验证 $f_u(\Gamma_1)=/R^+$和 $f_u(\Gamma_2)=/R^+$, 另外$/R^+\subset J(f_u)$根据 $J(f_u)$的完全不变性得 Γ_1, $\Gamma_2\subset J(f_u)$.

假设有某个实值参数 $U\in[0, +\infty)$它的非空 $F(f_u)$有有限个分支, 根据引理 2.4, 我们得 $F(f_u)$的分支要么有界要么无界分支只有一个. 在区域 H 和$D-H$ 这间必然存在一个包含有界分支的区域. 即该区域含有 $J(f_u)$的内部点. 这与当 $F(f_u)\neq\Phi$ 时 $J(f_u)$没有内点相矛盾. 因此 $F(f_u)$有无穷多个分支或空.

由于 $F(f_u)$没有游荡域, 以引理 2.5 得 $F(f_u)$是单连通的.

从定理 2.1 的证明过程知当 $Reu<0$ 时 $F(f_u)$只有一个分支 D, 因此 $J(f_u)=\partial D$, 即我们有.

推论 2.1 当 $Reu<0$ 时函数 f_u 的 Julia 集上不包含淹没点.

Baker(1970)已证明存在某实数 U 和 f_u, $J(f_u)=D$, Jang(1992)进一步证明如果 $U\in\{z\mid Rez<0\}\ U\{z\mid\ |z-1<1\}\cup(2, u_x)$, 则 $J(f_u)\neq D$. 他同时也证明存在一个单调递增序列$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$使得 $J(f_u)=D$, Qiao(1994; 1995)证明: 存在一无界开集 $M\subset/R^+$使得 $J(f_u)=D$, $u\in M$. 一个很自然问题: 是否存在一个无界正数序列$\{U_n\}$使得 $J(f_{U_n})\neq D$. 下面我们

就来解决这个问题.

定理 **2. 2**　存在一无界正数序列$\{U_n\}\subset(2,+\infty)$使得$J(f_{U_n})\neq D$.

从 Qiao (1994)中定理 2 的证明过程我们有如下结论.

引理 **2. 8**　存在一无界正数序列$\{U'_n\}\subset(2,+\infty)$使得 $S_{Mn}(U'_n)=Un$, $Mn\in/N$, 这里 $S_n(U)=f_n(-1)$.

引理 **2. 9**　对任意 $n>2$, $S_n(U)\to 0$ 当 $n\to\infty$.

定理 2. 2 证明　根据引理 2. 8, 存在一无界正常序列$\{U'_n\}$ c $(2,+\infty)$使得 $S_{Mn}(U_n)=U'n<-2$, 对某个 $Mn\in/N$. 从引理 2. 9 得 $S_{Mn}(U)\to$ 当 $n\to\infty$. 从函数 $S_{Mn}(U)$ 的连续性知存在一个 $Un\rhd Un'$) 使得 $S_{Mn}(U_n)=-1$, 即 $f^{Mn}_{Un}(-1)$, 而点 $z_o=-1$ 是函数 f_{Un} 的临界点. 因此 $z_o=-1$ 是 f_{Un} 的超吸性周期点, 因此 $-1\in F({}_{Un}f^{M_n}_{U_n})$ 即$J(f_{Un})\neq D$, 由于 $U_n>U_n'$ 和$\{U_n'\}$ 的无界性推知序列$\{U_n\}^{\infty}_{n=1}$ 是无界的.

参　考　文　献

Yang C C, Hua X H. 1997. Dynamics of transcendental entire functions. 南京大学学报(数学半年刊), 14(1): 1～4

Baker L N. 1970. Limit functions and sets of non— normality in itcration theory. Ann Acad Sci Fcnn Ser A I Math, 467: 1～11

Baker I N. 1975. The domains of normality of an entire function. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, I: 277～284

Bergweiler W, Rohde St. 1995. Ommited values in domains of normality. Proc Amer Math Soc, 123: 1 857～1 858

Eromenko A, Lyubich M Yu. 1990. The dynamics of analytic transformations, Leningrad. Math J, 3: 563～634

Eromenko A, Lyubich M Yu. 1992. Dynamical properties of some classes of entire functions. Ann Inst Fourier, 42: 989～1 020

Jang C M. 1992. Julia set of the function $z\exp(z+u)$. Tohoku Math J, 44: 271

Qiao J Y. 1994. The Julia set of the mapping $z\to z\exp(z+u)$. Chn Bull, 39: 529～533

Qiao J Y. 1995. The bured points on the julia set of rational and entire functins. Sci in China Ser A, 25(11): 1 139～1 146

Schiff J L. 1993. Normal Families. Springer-Verlag: New York Inc, 33～35

DYNAMICAL PROPERTY OF HYPER INTEGRAL FUNCTION $f_u: z\to z\exp(z+u)$

Yang Degui　Zhang Guoquan

(College of Sciences, South China Agric. Univ., Guangzhou, 510642)

Abstract

The dynamical properties of hyper interal function $f_u(z)=z\exp(z+u)$, where u is a complex para meter was studied. It was found that there exits an unbounexd sequence $\{U_n\}$ of positive real numbers such that $J(F_{Un})=D$. The number of branches of $F(f_u)$ and the buried points of $J(f_n)$ were also studied in detail.

Key words　complex dynamics; Julia set; Fatouy set; branch

[责任编辑　张　砺]