

正规测度的一个特征^{*}

王石安¹ 韩景奎²

(1 华南农业大学理学院, 广州 510642; 2 中山大学数学系)

摘要 利用紧 Hausdorff 空间 X 中闭无处稠子集与连续函数空间 $C(X)$ 中单调网之间的对应关系, 得到正规测度的一个特征: 定理 设 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $0 \leq \mu \in M(X)$ 是正规的当且仅当对 X 中的每一闭无处稠子集 G , 有 $\mu(G) = 0$.

关键词 正规测度; 单调网; 闭无处稠

中图分类号 O177.3

1 主要定理

设 E 是一向量格, E 中的子集 $\{z: x \leq z \leq y\}$ 称为序区间, 记为 $[x, y]$; E 中的子集 B 称为序有界的, 如果它包含在 E 中某个序区间中; E 上所有在序区间上有界的线性形式组成的空间 $E^\sim$ 称为 E 的序对偶空间, 它可看作 E 的代数对偶空间 E^* 的一个子空间. 在通常的半序下, $E^\sim$ 是一个序完备的向量格. 线性泛函 $x' \in E^\sim$ 称为正规的(或序连续的), 如果 E 中 $x_\alpha \uparrow x$ 可推出 $\lim \langle x_\alpha, |x'| \rangle = \langle x, |x'| \rangle$. $E^\sim$ 中所有正规元素形成一个带, 记为 $E_n^\sim$, 称为 E 的序连续对偶空间.

特别地, 若 $E = C(X)$: 紧空间 X 上所有连续函数所构成的 Banach 格, 有 $C(X)^\sim = M(X)$; X 上正则 Borel 测度空间[对任意 $\mu \in M(X)$, 用 $\mu(f)$ 代替 $\int f(x) d\mu$, 这样就可以将 $M(X)$ 与 $C(X)^\sim$ 等同 (Schwartz, 1984)], 以后常将 $M(X)$ 中的元看成一个测度或一个泛函而不加区分. $C(X)$ 的序连续对偶空间 $C(X)_n^\sim$ 中的元称为正规测度 (Lotz, 1974).

如果 $C(X)_n^\sim$ 分离 $C(X)$, 则称紧 Hausdorff 空间 X 是超 Stone 空间 (Lotz, 1974). Lotz (1974) 命题 1.5 给出超 Stone 空间的一个特征——Dixmier-Grothendieck 定理的格理论形式: X 是超 Stone 空间当且仅当 $C(X)$ 是某一 Banach 格的对偶空间. 从而, 如何刻画正规测度的特征就成为一个很重要的问题.

本文纯粹从 X 的拓扑性质出发, 首先建立 $C(X)$ 中单调网与 X 中闭无处稠子集之间的对应关系, 然后在此基础上得到正规测度的如下特征.

主要定理: 设 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $0 \leq \mu \in M(X)$ 是正规的当且仅当对 X 中的每一闭无处稠子集 G , 有 $\mu(G) = 0$.

2 主要定理的证明

为了证明主要定理, 需要如下引理.

引理 1 设 $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 是 $C(X)$ 中的单调下降网且 $\inf_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha = 0$. 若 $A = \{x \in X \mid \inf_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) > 0\}$ 则:

(1) A 是第一纲集; (2) 如果 $0 \leq \mu \in M(X)$ 且 $\mu(A) = 0$, 则 $\inf_{\alpha \in \Lambda} \mu(f_\alpha) = 0$.

证明 (1) 令

$$A_n = \{x \in X \mid f_\alpha(x) \geq 2^{-n}, \alpha \in \Lambda\} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \{x \in X \mid f_\alpha(x) \geq 2^{-n}\}; n = 1, 2, \dots,$$

则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 且对任一 $n \geq 1$, A_n 是闭的 (因为 f_α 都连续); 又由于 X 是紧的, 由 Urysohn 引

理知: A_n 均是无处稠的, 这就证明了 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是第一纲集.

(2) 因为 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 所以 A 是一个 Borel 集. 不妨设对任意 $\alpha \in \Lambda$, $f_\alpha \leq^{\text{Def}} g = f_{\alpha_0}$ ($\alpha_0 \in \Lambda$), 由于 μ 是正则的且 $\mu(A) = 0$, 所以对任意 $\epsilon > 0$, 存在紧子集 $K \subset X \setminus A$, 使得 $\mu(X \setminus K) \leq \epsilon$, 由 Dini 定理, 网 $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 在 K 上一致收敛于 0, 所以

$$\inf_{\alpha \in \Lambda} \int f_\alpha d\mu \leq \epsilon \|g\|$$

由 ϵ 的任意性知非负数 $\inf_{\alpha \in \Lambda} \int f_\alpha d\mu = 0$, 即 $\inf_{\alpha \in \Lambda} \mu(f_\alpha) = 0$.

引理 2 设 A 是 X 中的闭无处稠子集, $D = \{f \in C(X) \mid 0 \leq f \leq 1, \&f(A) = \{1\}\}$, 则:

(1) D 是下定向的且 $\inf D = 0$;

(2) $\inf_{f \in D} f(x) = \chi_A(x)$, $\forall x \in X$;

(3) $\mu(A) = \inf_{f \in D} \mu(f) = \inf_{f \in D} \int f d\mu$, $\forall 0 \leq \mu \in M(X)$.

其中 $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in X \setminus A \end{cases}$ 是 A 的特征函数.

证明 (1) 显然 D 是下定向的, 设 $g \in C(X)$ 满足 $0 \leq g \leq f$, $\forall f \in D$, 则 $\forall x \in X \setminus A$, 由于 X 是正则的且 A 是闭的, 由 Urysohn 引理知: 存在 $f_x \in C(X)$ 满足 $0 \leq f_x \leq 1$, $f_x(A) = \{1\}$ 且 $f_x(x) = 0$, 所以

$$f_x \in D \quad \text{且} \quad 0 \leq g(x) \leq f_x(x) = 0, \quad \forall x \in X \setminus A.$$

于是 $g(X \setminus A) = 0$, 又 A 是无处稠的且 g 连续, 所以 $g(x) = 0$, $\forall x \in X$, 即 $g = 0$, 这就证明了 $\inf D = 0$.

(2) 设 $x \in A$, 则对任意 $f \in D$ 有 $f(x) = 1$, 所以 $\inf_{f \in D} f(x) = 1$, 设 $x \in X \setminus A$ 则由 Urysohn 引理知: 存在 $g \in C(X)$, 满足 $0 \leq g \leq 1$, $g(x) = 0$ 且 $g(A) = \{1\}$, 从而 $g \in D$ 且

$$0 \leq \inf_{f \in D} f(x) \leq g(x) = 0, \quad \text{即} \quad \inf_{f \in D} f(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus A,$$

因此 $\inf_{f \in D} f(x) = \chi_A(x) \quad \forall x \in X$.

(3) 由 (1) 和 (2) 立即得到.

主要定理的证明 充分性, 设 $C(X)$ 中的单调网 $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 满足 $\inf_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha = 0$, 且令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 其中:

$$A_n = \{x \in X \mid f_\alpha(x) \geq 2^{-n}, \alpha \in \Lambda\} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \{x \in X \mid f_\alpha(x) \geq 2^{-n}\}; n = 1, 2, \dots,$$

则 A_n ($n \geq 1$) 是闭无处稠的, 由假设 $\mu(A_n) = 0$ ($n \geq 1$) 有:

$$0 \leq \mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 1 \quad \text{或} \quad \mu(A) = 0.$$

由引理1知: $\inf_{\alpha \in \Lambda} \mu(f_\alpha) = 0$, 所以 μ 是正规的.

必要性: 设 G 是 X 中的任意闭无处稠子集, 令

$$D = \{f \in C(X) \mid 0 \leq f \leq 1 \text{ 且 } f(G) = \{1\}\},$$

由引理2知: $\inf D = 0$, 又 μ 是正规的, 所以, $\mu(G) = \inf_{f \in D} \mu(f) = 0$.

注: 若 E 是向量格, 则 $x' \in E^+$ 是序连续的当且仅当 x' 与 $-x'$ 的上确界 $x' \vee (-x')$ 是序连续的 (Aliprantis et al, 1985), 所以对一般的测度, 我们有如下定理:

定理 设 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $\mu \in M(X)$ 是正规的当且仅当对 X 中的每一闭无处稠子集 G , 有 $\{\mu \vee (-\mu)\}(G) = 0$.

推论 (Schwartz, 1984) $C[0, 1]_{\tilde{n}} = 0$.

证明 设 $0 < \alpha \in C[0, 1]_{\tilde{n}}$, 由 Riesz 表现定理知, 存在 $[0, 1]$ 上的 Baire 测度 μ , 使得 $\alpha(f) = \int f d\mu$, $f \in C[0, 1]$, 取 $[0, 1]$ 上具正测度的闭无处稠子集 A 及 $C[0, 1]$ 中单调下降序列 (f_n) 使得 $\chi_A(t) = \inf f_n(t)$, 则 $f_n \downarrow 0$, 但 $\alpha(f_n) \geq \int \chi_A d\mu = \mu(A) > 0$.

参 考 文 献

- Aliprantis C D, Burkinshaw O. 1985. Positive Operator. Orlando: Academic Press Inc, 1~45
 Lotz H P. 1974. Minimal and reflexive Banach lattices. Math Ann, 209: 117~126
 Schwartz H U. 1984. Banach lattices and operators. Teubner-texte, Zur Maths Band 71. Berlin: Springer-Verlag, 52~55

A Characterization of Normal Measures

Wang Shi'an¹ Han Jinglun²

(1 College of Science, South China Agric. Univ., Guangzhou, 510642; 2 Dept. of Maths., Zhongshan Univ.)

Abstract By applying the corresponding relation of the monotonic nets of the continuous function space $C(X)$ on a compact Hausdorff space X and the closed nowhere dense subsets of X , it was obtained in this note a characterization of normal measures. **Theorem** Let X be a compact Hausdorff space, a regular measure $\mu \in M(X)$ is normal if and only if for each closed nowhere dense set G in X , $[(\mu \vee (-\mu))](G) = 0$.

Key words normal measure; monotone nets; closed nowhere dense

【责任编辑 张 砾】