华南农业大学学报　20(2)　1999:109～113
J. South China Agric. Univ.

函数的幂加权平均值

余彩玉　王石安
(华南农业大学理学院,广州,510642)

摘要　利用函数的同序和反序概念,研究了函数幂加权平均值的性质及其关于其幂指数的函数特性(如对数凸性及单调性).作为应用,引进了一个新的平均值,比较了 Holder 平均值和 Stolarsky 平均值.同时得到 Ostle-Terwilliger 不等式及算术—几何不等式的加细的结果.

关键词　幂加权平均值;同序;反序;不等式
中图分类号　O 177.3

如果 f 和 p 是闭区间[a,b]上定义的正的可积函数,则函数 f 在[a,b]上具有权 p 的幂加权平均值定义为:

$$M_p(f,r)=\begin{cases}\left[\int_a^b p(x)f^r(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}} & r\neq 0,\\ \exp\int_a^b p(x)\log f(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b p(x)\mathrm{d}x & r=0;\end{cases}$$

容易验证它具有如下基本性质:

$$M_p(f,-r)=[M_p(f^{-1},r)]^{-1},\quad M_p(fg,r)=M_p(f,r)M_{pf}(g,r).$$

记 $M_p(f,1)$ 为 $M_p(f)$,称为函数 f 的具有权 p 的加权平均值,从而 $M_p(f,r)=[M_p(f^r)]^{1/r}$,

设 $L(D)$ 是定义在区间 D 上的全体实函数所构成的函数空间,在 $L(D)$ 引入如下关系,它是函数的单调性概念的推广:

定义　设 $f,g\in L(D)$,称 f 与 g 是同序的,记为 $f\vee g$,如果对任意 $x,y\in D,x\neq y$,有

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]>0,$$

若上述不等式反向,则称 f 与 g 是反序的,记为 $f\wedge g$.

1　基本性质

从定义立即可以得到,函数的单调性实际上是函数与单位函数 I 之间的某种同序或反序关系(Mitronovic, 1970),即

定理 1　设 $f\in L(D)$,则

(1) f 在 D 上是单调递增的当且仅当 $I\vee f$;

(2) f 在 D 上是单调递减的当且仅当 $I\wedge f$.

定理 2　(Cebysev 不等式)设 f,g 和 p 是 $L[a,b]$ 上正可积函数,则

(1) $M_p(f)M_p(g)\leqslant M_p(fg)$,如果 $f\vee g$;

(2) $M_p(f)M_p(g)\geqslant M_p(fg)$,如果 $f\wedge g$;

等号当且仅 $f\equiv$ 常数或 $g\equiv$ 常数成立.

1998－02－23 收稿　　余彩玉,女,35 岁,讲师

证明 假设 f 和 g 不是常数，令：

$$S = [\int_a^b p(x)\mathrm{d}x)^2][M_p(fg) - M_p(f)M_p(g)].$$

则：$S = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x =$

$$\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(x)[g(x) - g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(y)[g(y) - g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而 $S = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(x) - f(y)][g(x) - g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\begin{cases} > 0, & f \vee g \\ < 0, & f \wedge g \end{cases}$,

这就完成了定理2的证明.

由于 $f \vee f$ 且 $f^n \wedge f^{-n}$，所以由定理2可得如下两个推论：

推论1 （Cauchy不等式）

$$[M_p(f)]^2 \leqslant M_p(f^2).$$

推论2 如果 $f \neq 0$ 且 n 为一正整数，则

$M_p(f^n)M_p(f^{-n}) \geqslant 1$（如果 n 是奇整数，则还需假设 $f > 0$）.

定理3 （Holder不等式）设 f,g 和 p 是 $[a,b]$ 上的正可积函数 $\alpha,\beta > 0$ 且 $\alpha + \beta = 1$，则

$$M_p(f^\alpha g^\beta) \leqslant [M_p(f)]^\alpha[M_p(g)]^\beta.$$

当且仅当 $f = \mathrm{k}g$ 几乎处处成立时上式取等号，其中k为常数.

证明 由几何－算术平均值定理易证.

定理4 设 f,g 和 p 是 $[a,b]$ 上的正可积函数，则对任意实数 $r \neq 0$，有：

$$M_p(f,r) \geqslant M_q(f,r), \qquad q/p \wedge f,$$

特别地，如果 $q/p \wedge f$，则 $M_p(f) \geqslant M_q(f)$.

证明 如果 $r > 0$，则从假设 $q/p \wedge f$ 知 $q/p \wedge f^r$，从而由定理2知

$$M_p(q/p)M_p(f^r) \geqslant M_p(q/p \cdot f^r),$$

从而 $M_p(f^r) \geqslant M_p(q/p \cdot f^r)/M_p(q/p) = M_q(f^r)$，所以

$$M_p(f,r) = [M_p(f^r)]^{\frac{1}{r}} \geqslant [M_q(f^r)]^{\frac{1}{r}} = M_q(f,r),$$

$r < 0$ 的情形可类似地证明.

如果 f 在 $[a,b]$ 上单调递减且有正的下确界，则 $I \wedge f$ 且 $\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x > 0$，由于对任意实数，有 $I = I \cdot f^r/f^r$，从而由定理4知：$M_{If^r}(f) \leqslant M_{f^r}(f)$.

所以有如下：

推论 设 f 在[a,b]上单调递减且有正的下确界，则对任意实数 $r > 0$，有

$$\int_a^b xf^{r+1}(x)\mathrm{d}x/\int_a^b xf^r(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f^{r+1}(x)\mathrm{d}x/\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x.$$

2 函数特征

$M_p(f,r)$ 不仅与 f 和 p 有关，而且与实数 r 也有关. 当 r 在实数集中取一确定值时，$M_p(f,r)$ 在正实数集中有唯一确定值与之对应，从而 $M_p(f,r)$ 在实数集上定义了一个实函数

(Carlson,1972).

$$F(t)=\begin{cases}[\int_a^b p(x)f^t(x)\mathrm{d}x/\int_a^b p(x)\mathrm{d}x]^{1/t}, & t\neq 0\\ \exp[\int_a^b p(x)\log f(x)\mathrm{d}x/\int_a^b p(x)\mathrm{d}x] & t=0\end{cases}.$$

函数 f 称为在区间 D 上是严格对数凸的,如果函数 $x\mapsto \log f(x)$ 在 D 上严格凸.下面研究 F 的函数特征.

定理 5　假设 f 不恒等于常数,则函数 $G(t)=F(t)^t$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格对数凸.

证明　如果 $t>0$,则:

$$G(t)=\int_a^b p(x)f^t(x)\mathrm{d}x/\int_a^b p(x)\mathrm{d}x=M_p(f^t),$$

设 $0<r<s<t$ 且 $s=r\alpha+t(1-\alpha)$,$(0<\alpha<1)$,则从定理 3 知

$$G(s)=G[r\alpha+t(1-\alpha)]=M_p[f^{r\alpha+t(1-\alpha)}]=M_p[(f^r)^\alpha\cdot(f^t)^{1-\alpha}]$$
$$<[M_p(f^r)]^\alpha\cdot[M_p(f^t)]^{1-\alpha}=G(r)^\alpha\cdot G(t)^{1-\alpha},$$

因此 $G(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格对数凸的.

定理 6　假设 f 不恒等于常数,则函数 $F(t)$ 在实数集中是单调递减的.

证明　容易验证 $F(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续可微的,且

$$F'(0)=F(0)\times\{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)[\log f(x)]^2\mathrm{d}x-[\int_a^b p(x)\log f(x)\mathrm{d}x]^2\}/2[\int_a^b p(x)\mathrm{d}x]^2,$$

令

$$H(t)=t^2F'(t)/F(t),$$

则 $H(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且当 $t\neq 0$ 时,有:

$$H(t)=t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-\frac{1}{t}\log\frac{\int_a^b p(x)f^t(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}]$$

$$=\frac{t}{\int_a^b p(x)f^t(x)\mathrm{d}x}\int_a^b p(x)f^t(x)\log f(x)\mathrm{d}x-\log\frac{\int_a^b p(x)f^t(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}.$$

由于 $F(t)>0$,所以 F' 和 H 有相同的符号,从而为了证明 F 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增,只须证明 $H>0$,而:

$$H'(t)=t\{\int_a^b p(x)f^t(x)[\log f(x)]^2\mathrm{d}x-[\int_a^b p(x)f^t(x)\log f(x)\mathrm{d}x]^2\}/[\int_a^b p(x)f^t(x)\mathrm{d}x]^2.$$

从推论 1 知 H 和 t 具有相同的符号,所以 $H(t)$ 当 $t>0$ 时递增,当 $t<0$ 时递减且达到其最小值 0,因此 F' 和 H 对所有的 t 都为正值(除 $t=0$ 外),另一方面由定理 2 知 $F'(0)=0$ 当且仅当 $f\equiv$ 常数,这就完成了证明.

3　应用

设 s 是一个实数,t 是一个正实数.定义正实变量 a 和 b 的带两个参数 s 和 t 的二元连续

实函数 W 如下：

$$W(s,t,a,b) = [t(a^{s+t} - b^{s+t})/(s+t)(a^t - b^t)]^{1/s}, \tag{1}$$

从而，W 满足如下性质：

$\min(a,b) \leqslant W(s,t,a,b) \leqslant \max(a,b)$[即 $W(s,t,a,b)$ 介于 a 和 b 之间]，

$W(s,t,\lambda a,\lambda b) = \lambda W(s,t,a,b),\quad \lambda \geqslant 0;\quad W(s,t,a,b) = W(s,t,b,a).$

所以 $W(s,t,a,b)$ 是 a 和 b 的平均值，它是所谓 Holder 平均，Stolarsky 平均及 Heron 平均的推广，因为：

$H_r(a,b) = W(r,r,a,b) = [(a^r + b^r)/2]^{\frac{1}{r}}$　　(Holder 平均)，

$S_r(a,b) = W(1-r,r,a,b) = W(r-1,1,a,b) = [(a^r - b^r)/r(a+b)]^{1/(r-1)}$　(Stolarsky 平均)，

$W(s,1/r,a,b) = [(a^{s+1/r} - b^{s+1/r})/(rs+1)(a^{1/r} - b^{1/r})]^{1/s}\qquad r = 1,2,\cdots,$

$H(a,b) = W(1,1/2,a,b) = (a + \sqrt{ab} + b)/3$　　Heron 平均.

极限情形($t = 0, s = 0$)分别给出广义对数平均值和广义幂指平均值：

$$L_r(a,b) = \lim_{t\to 0} W(r,t,a,b) = \left[\frac{a^r - b^r}{r(\log a - \log b)}\right]^{\frac{1}{r}},$$

和

$$I_r(a,b) = \lim_{r\to 0} W(s,r,a,b) = e^{-\frac{1}{r}}\left(\frac{a^{a^r}}{b^{b^r}}\right)^{\frac{1}{a^r - b^r}}.$$

注意到(1)具有如下积分形式：　$W(s,t,a,b) = \left(\int_a^b x^{s+t-1}\mathrm{d}x \Big/ \int_a^b x^{t-1}\mathrm{d}x\right)^{1/s}.$　　(2)

设 $p(x) = x^{t-1}$ 且 $f(x) = x$，则 $W(s,t,a,b)$ 是函数 f 在区间 $[a,b]$ 上具有权 p 的幂加权平均值，即

$$W(s,t,a,b) = M_p(f,s). \tag{3}$$

于是由(3)及定理 6 可得如下定理及推论．

定理 7　$W(s,t,a,b)$ 对任意正数 t 关于参数 s 都是严格单调递增的．

推论　(1) $H_r(a,b) < S_r(a,b),\qquad r < 1/2,$

(2) $H_r(a,b) > S_r(a,b),\qquad r > 1/2,$

(3) $H_r(a,b) < S_r(a,b),\qquad r = 1/2.$

证明　这可从定理 7 和如下等式容易验证，

$H_r(a,b) = W(r,r,a,b)$ 及 $S_r(a,b) = W(1-r,r,a,b).$

定理 8　$W(s,t,a,b)$ 对任意实数 s 关于参数 t 都是严格单调递增的．

证明　设 $t_1 > t_2 > 0, p(x) = x^{t_1-1}, q(x) = x^{t_2-1}$ 且 $f(x) = x$，则 $q(x)/p(x) = x^{t_2-t_1}$ 是递减的而 $f(x)$ 是递增的，从而 $q/p \wedge f$. 由定理 4 得

$$W(s,t_1,a,b) = M_p(f,s) > M_q(f,s) = W(s,t_2,a,b).$$

推论　对任意实数 s 和任意不相等的正数 a 和 b，有如下不等式：

$$W(s,1,a,b) > W(s,1/2,a,b) > \cdots > W(s,1/r,a,b) > \cdots > L_s(a,b),$$

特别地，

$$(a+b)/2 > (a+\sqrt{ab}+b)/3 > \cdots > [a + a^{(r-1)/r}b^{1/r} + \cdots + a^{1/r}b^{(r-1)/r} + b]/r > \cdots$$

$> (a-b)/(\log a - \log b)$.

这是所谓的 Ostle - Terwilliger 不等式(Ostle et al, 1957)的加细.

定理9 设实数 s_1, t_1, s_2, t_2 满足条件:$s_1 < s_2, t_1 > t_2 \geqslant 0$ 且 $s_1 + t_1 \geqslant s_2 + t_2$,则:

$$W(s_1, t_1, a, b) > W(s_2, t_2, a, b) \qquad a, b > 0, a \neq b.$$

证明 设 $\alpha = s_1 + t_1 - 1, \beta = s_2 + t_2 - 1, p(x) = x^{\alpha}, q(x) = x^{\beta}$ 且 $f(x) = 1/x$,则

$$W(s_1, t_1, a, b) = \int_a^b x^{s_1+t_1-1}\mathrm{d}x / \int_a^b x^{t_1-1}\mathrm{d}x)^{1/s} = (\int_b^a x^{\alpha}\mathrm{d}x / \int_b^a x^{\alpha} \cdot x^{-s_1}\mathrm{d}x)^{1/s} = 1/M_p(f, s_1),$$

同样地,
$$W(s_2, t_2, a, b) = 1/M_q(f, s_2),$$

由于 $p(x)/q(x) = x^{\alpha-\beta}$ 是递增的且 $f(x)$ 是递减的,从而 $p/q \wedge f$,从定理4和定理6知

$$M_p(f, s_1) < M_q(f, s_1) < M_q(f, s_2),$$

所以
$$W(s_1, t_1, a, b) = 1/M_p(f, s_1) > 1/M_q(f, s_2) = W(s_2, t_2, a, b).$$

推论 对任意正数 r 和任意不相等的正数 a 和 b,有如下不等式:

$$\sqrt{ab} < L_r(a, b) < I_r(a, b) < H_r(a, b),$$

特别地,

$$\sqrt{ab} < (a-b)/(\log a - \log b) < e^{-1}(a^a/b^b)^{1/(a-b)} < (a+b)/2.$$

参 考 文 献

Carlson B C. 1972. The logarithmic mean. Amer Math Monthly, 79:615 ~ 618

Mitronovic D S, Vasic P M. 1970. Analytic inequalities. New York: Springer - Verlag, 2 ~ 57

Ostle B, Terwilliger H L. 1957. A comparison of two means. Proc Mortana Acad Sci, 17: 69 ~ 70

Weighted Power Means of Functions and Their Applications

Yu Caiyu Wang Shi'an

(Science of College, South China Agric. Univ., Guangzhou, 510642)

Abstract By means of the concepts of the same order and the opposite order between functions, studied the properties of weighted power means of functions and their functional characteristics such as the logarithmic convexity and monotony when they are considered as functions of their power exponents. As applications a new mean was introduced, comparisons between the so-called Holder's means and the Stolarsky's means were made, and results of the refinements of the Ostle-Terwlliger inequality and of the arithmetic-geometric mean inequality were obtained.

Key words weighted powere means of functions; same order; opposite order; inequalies

【责任编辑 张 砺】