

文章编号: 1001—411X (2001) 03—0094—01

实幂等矩阵的伴随矩阵

金玲玲, 赵立新, 刘迎湖

(华南农业大学理学院, 广东 广州 510642)

On the Adjoint Matrix of a Real Idempotent Matrix

JIN Ling-ling, ZHAO Li-xin, LIU Yin-hu

(College of Science, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China)

关键词: 实幂等矩阵; 伴随矩阵; 代数余子式; 幂等

Key words: idempotent matrix; adjoint matrix; cofactor; idempotent

中图分类号: O151.21

文献标识码: A

通常, 我们设 R 代表实数域, $M_n(R)$ 代表所有 $n \times n$ 阶实数矩阵的集合. 假定 $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(R)$, 系数 $\alpha, \beta \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, 我们用 $A(\alpha, \beta)$ 表示矩阵 A 中处于 α 行和 β 列的子阶矩阵, 特别地, A 中元素 $\alpha_{ij} = A(\{i\}, \{j\})$. A_{ij} 代表 α_{ij} 的代数余子式, 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A) (\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}, \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}).$$

A 的伴随矩阵定义为:

$$\text{adj}(A) = (A_{ji}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

定理^[1] 设 $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(R)$ 是一个实幂等矩阵, 则 A 的伴随矩阵 $\text{adj}(A)$ 也是幂等的.

在文^[1]中定理的证明有些复杂, 现给出一个简短的证明. 首先, 我们给出引理: 设 $A, B \in M_n(R)$, 则

$$\text{adj}(AB) = \text{adj}(B) \text{adj}(A).$$

仅需证明:

$$[\text{adj}(AB)](\{i\}, \{j\}) = [\text{adj}(B) \text{adj}(A)](\{i\}, \{j\}).$$

引用 Cauchy-Binet 公式^[2]

$$\begin{aligned} [\text{adj}(AB)](\{i\}, \{j\}) &= \text{矩阵 } AB \text{ 第 } j \text{ 行第 } i \text{ 列元素的代数余子式} \\ &= (-1)^{i+j} \det(AB) (\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}, \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}) \\ &= (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^n \det(A) (\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}, \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}) \\ &\quad \det(B) (\{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}, \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}) \\ &= \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} = [\text{adj}(B) \text{adj}(A)](\{i\}, \{j\}). \end{aligned}$$

故引理得证.

定理的证明: 假定 $A \in M_n(R)$ 是幂等的, 则 $A^2 = A$, 由引理知: $\text{adj}(A) = \text{adj}(A^2) = [\text{adj}(A)]^2$, 所以 $\text{adj}(A)$ 也是幂等的. 证毕.

参考文献:

- [1] Jin Bai Kim, Hee Sik Kim, Seug Dong Kim. An adjoint matrix of a real idempotent matrix[J]. 数学研究与评论, 1997, 17(3), 335—339.
- [2] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge U P., 1985. 22.

【责任编辑 周志红】

收稿日期: 2000—09—21

作者简介: 金玲玲(1963—), 女, 讲师.