流出大于流入的一维渗流问题弱解的一个性质

方 平[1], 黄志达[2]

(1 华南农业大学 理学院, 广东 广州 510642; 2 华南师范大学 教学系, 广东 广州 510631)

摘要: 主要揭示了一维渗流问题弱解的一个性质, 即当流量流出大于流入时, 一定存在某个时刻 t_0, 使得出水边界一定会干。

关键词: 渗流; 弱解; 流出流入的量

中图分类号: O175.2　　文献标识码: A　　文章编号: 1001－411X (2003) 01－0077－03

1 引言

考虑如下一维渗流问题:

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
[u(x,t)]_t=\left\{D[u(x,t)]u(x,t)_x\right\}_x- \\
\left\{K[u(x,t)]\right\}_x,\ (x,t)\in Q_T, & (1.1)\\
u(x,0)=u_0(x),\quad x\in[0,1], & (1.2)\\
\left\{D[u_0(x)]u'_0(x)-K[u_0(x)]\right\}\big|_{x=0}=q_1,\\
\left\{D[u_0(x)]u'_0(x)-K[u_0(x)]\right\}\big|_{x=1}=q_2,
\end{cases}
$$

其中, $Q_T=(0,1)\times(0,T]$, $0<v_1\leqslant u_0(x)\leqslant v_2<1$, v_1、v_2 为常数; $K(s)$ 与 $D(s)$ 满足如下条件:

(1) $A[u_0(x)]=A[u(x,0)]=\int_0^{u_0(x)}D(s)\mathrm{d}s$ 是 Lipschitz 连续的;

(2) $q_1>q_2>0$. $D(0)=K(0)=0$;

(3) $D(s)$ 是严格递增函数, 而且当 $s\in[0,\infty)$ 时, $D(s)<D_0=$ 常数;

(4) 当 $s\in[0,\infty)$ 时, $K(s)\leqslant K_0$, $0\leqslant K'(s)\leqslant K_1$, 其中 K_0 与 K_1 是常数, 而且当 $s\in(0,1)$ 时 $K(s)$ 是严格凸的;

(5) D'', K'' 在 $(0,\infty)$ 上局部 Hölder 连续;

(6) 当 $s\to0^+$ 时, $\dfrac{D(s)}{s}\in L^1(0,1)$, $\dfrac{K(s)}{sD(s)}\to0$, $K'(s)=O[D(s)]$;

(7) 初边值满足如下的相容条件:

(a) $\left\{D[u(x,t)]u(x,t)_x-k[u(x,t)]\right\}\big|_{x=0}=q_1$, $t\in[0,T]$;

(b) $\left\{D[u(x,t)]u(x,t)_x-k[u(x,t)]\right\}\big|_{x=1}=q_2$, $t\in[0,T]$.

其中, 条件(a)表示在边界 $x=0$ 上的出水量为 q_1, 条件(b)表示在边界 $x=1$ 上的进水量为 q_2.

为了讨论(Ⅰ)的解的性质, 先引进如下定义:

定义 1: 令 $(\bar{x},\bar{t})\in R^2$, 称点集 $\{(x,t)\mid t<\bar{t},(x-\bar{x})^2+(t-\bar{t})^2<r,r>0\}$ 为点 $(\bar{x},\bar{t})$ 的下半邻域.

定义 2: 设在 x-t 平面上, 连通区域 G 有边界 ∂G, G 的一个抛物边界 ∂G_p 是 ∂G 的一个子集, 一点 P 属于 ∂G_p 当且仅当点 P 的任一下半邻域不全在 G 中.

记 $A[u(x,t)]=\int_0^{u(x,t)}D(s)\mathrm{d}s$.

定义 3: 若函数 $u(x,t)$ 满足下面的条件, 则称 $u(x,t)$ 为问题(Ⅰ)的弱解:

(ⅰ) $u(x,t)$ 是一个实的非负的有界的连续函数;

(ⅱ) 在 Q_T 上, $A[u(x,t)]$ 关于 x 具有有界的广义导数;

(ⅲ) $u(x,t)$ 满足下面的等式:

$$
\int_{Q_T}\left\{\left[\left(A(u(x,t))_x-K(u(x,t)\right)\right]\phi(x,t)_x-u(x,t)\phi(x,t)_t\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^1\phi(x,0)u_0(x)\mathrm{d}x+\int_0^T[\phi(1,t)q_2-\phi(0,t)q_1]\,\mathrm{d}t,
$$

其中, $\phi(x,t)\in\left\{\Psi(x,t)\mid\Psi(x,t)\in C^1(\overline{Q}_T),\Psi(x,T)=0\right\}$.

问题(Ⅰ)的弱解存在唯一性可按常规方法[1~3]证明.

引理: 假设 $t_0\in(0,T)]$, $v(x,t)$ 是(Ⅰ)中(1.1)在 Q_{t_0} 上的大于零的古典解, $u(x,t)$ 是问题(Ⅰ)的

收稿日期: 2001－12－17　　作者简介: 方 平(1974－), 男, 硕士

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971030); 华南农业大学校长基金资助项目(4900－K02022)

弱解, 在抛物边界 $\partial G_{t_0 p}=\{(x,t)\mid t=0, 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{(x,t)\mid x=0, 0<t\leqslant t_0\}\cup\{(x,t)\mid x=1, 0<t\leqslant t_0\}$ 上, 若 $u(x,t)-v(x,t)$ 的符号改变 m 次, 则在 $L=\{(x,t)\mid t=t_0, 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上, $u(x,t)-v(x,t)$ 的符号改变不会超过 m 次[1].

2 流出大于流入时的一个性质

定理: 设 $u(x,t)$ 是问题(I)的一个弱解, 那么一定存在某个 t_0 使得 $u(0,t_0)=0$, 也即在某个时刻 t_0, 出水边界会干.

证明: 假设方程(1.1)有一个行波解 $U(x)=U(x-mt)$, 则 $U(x-mt)$[简记 $U(x-mt)=U$] 满足方程(1.1), 即:

$$-mU_x=[D(U)U_x]_x-[K(U)]_x,$$

在上式两边关于 x 积分, 可以得到:

$$U_x=\frac{K(U)-(mU+B)}{D(U)}, \qquad (2.1)$$

其中, B 为一待定常数, 由(2.1)式可得:

$$x=\int_{U_0}^{U}\frac{D(s)}{K(s)-(ms+B)}\mathrm{d}s, (U_0\text{为常数}). \qquad (2.2)$$

(1) 首先, 由于 $q_1>q_2$, 故存在 $\alpha>0$, 使得 $q_1>(1+\alpha)q_2$, 而且 $(1-\alpha)q_1-q_2<0$, 我们可以证明一定存在一个充分小的正数 m_0, 使得: $\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}>v_2$, 而且成立下面的不等式:

$$K(s)>m_0s-\frac{q_1-q_2}{\alpha}, \qquad (0\leqslant s\leqslant 1)$$

$$\int_{v_2}^{\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}}\frac{D(s)}{K(s)-\left(m_0s-\frac{q_1-q_2}{\alpha}\right)}\mathrm{d}s>1, \qquad (2.3)$$

事实上, 若取 $m_0\in\left[0,\frac{[q_1-(1+\alpha)q_2]D(v_2)/\alpha}{v_2D(v_2)+K_0+(q_1-q_2)/\alpha}\right]$, 则:

$$\int_{v_2}^{\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}}\frac{D(s)}{K(s)-\left(m_0s-\frac{q_1-q_2}{\alpha}\right)}\mathrm{d}s>$$

$$\int_{v_2}^{\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}}\frac{D(v_2)}{K_0+\frac{q_1-q_2}{\alpha}}\mathrm{d}s=$$

$$\left[\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}-v_2\right]\times\frac{D(v_2)}{K_0+\frac{q_1-q_2}{\alpha}}>$$

$$\left[\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha}\times\frac{\alpha}{q_1-(1-\alpha)q_2}\times\frac{v_2D(v_2)+K_0+(q_1-q_2)/\alpha}{D(v_2)}-v_2\right]\times$$

$$\frac{D(v_2)}{K_0+\frac{q_1-q_2}{\alpha}}=1.$$

(2) 在(2.1)式中取 $B=-\frac{q_1-q_2}{\alpha}$, $m=m_0$ 充分小, 使得:

$$\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}>v_2,$$

而且(2.3)式成立. 因此在 $\left(v_2,\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}\right)$ 上一定存在某个常数 U_0, 使得:

$$\int_{U_0}^{\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}}\frac{D(s)}{K(s)-\left(m_0s-\frac{q_1-q_2}{\alpha}\right)}\mathrm{d}s=1, \qquad (2.4)$$

从而函数 $U(x)$ 可由下式决定:

$$x=\int_{U_0}^{U(x)}\frac{D(s)}{K(s)-\left(m_0s-\frac{q_1-q_2}{\alpha}\right)}\mathrm{d}s,$$

$$U(x)\in\left[0,\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}\right).$$

显然 $U(x)$ 具有如下 2 个性质:

(a) 一定存在某个常数 $a<0$, 使得 $U(a)=0$, 而且在 $a\leqslant x\leqslant 1$ 上是单调递增函数.

(b) $U(0)=U_0>v_2$, $U(1)=\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}$.

在 $t=0$ 时, $U(x)=U(x-m_0\times 0)=U(x)>v_2\geqslant u(x,0)=u_0(x)$, 故在 $t=0$ 时, $U(x-m_0t)>u(x,t)$. 从而由引理可知: $U(x-m_0t)$ 与 $u(x,t)$ 第一次相交仅仅会在边界 $x=0$ 或 $x=1$ 上发生.

如果 $U(x-m_0t)$ 与 $u(x,t)$ 首次相交于边界 $x=1$ 上的某点 P_1, 则:

$$U_x(P_1)\leqslant u_x(P_1). \qquad (2.5)$$

然而, 在 P_1 点有:

$$U_x=\frac{K(U)-\left(m_0U-\frac{q_1-q_2}{\alpha}\right)}{D(U)}=$$

$$\frac{K(u)+q_2-q_2-\left(m_0U-\frac{q_1-q_2}{\alpha}\right)}{D(U)}=$$

$$u_x-\frac{m_0U-\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha}}{D(U)}=$$

$$u_x-\frac{m_0\left[U-\frac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}\right]}{D(U)}.$$

当 $t>0$ 时, 因为 $U(1, m_0 t)<\dfrac{q_1-(1+\alpha)q_2}{\alpha m_0}$, $0<D(U)<D_0$. 所以 $U_x(P_1)>u_x(P_1)$, 这与(2.5)矛盾. 故首次相交不会出现在 $x=1$ 上.

若在 $U(0-m_0 t)$ 第一次减少到零之前, $U(x-m_0 t)$ 与 $u(x, t)$ 首次相交于边界 $x=0$ 上的某点 P_0, 则:

$$U_x(P_0)\geqslant u_x(P_0), \tag{2.6}$$

但是, 在点 P_0 有:

$$\begin{aligned}U_x &= \frac{K(U)-\left(m_0 U-\dfrac{q_1-q_2}{\alpha}\right)}{D(U)}= \\ &\frac{K(U)+q_1-q_1-\left(m_0 U-\dfrac{q_1-q_2}{\alpha}\right)}{D(U)}= \\ &u_x-\frac{q_1+m_0 U-\dfrac{q_1-q_2}{\alpha}}{D(U)}= \\ &u_x-\frac{m_0 U+\dfrac{q_2+(\alpha-1)q_1}{\alpha}}{D(U)}.\end{aligned}$$

因为 $m_0 U>0$, $(1-a)q_1-q_2<0$, 即 $q_2+(\alpha-1)q_1>0$. 故 $U_x<u_x$. 这一矛盾说明在 $u(0, t)=0$ 之前 $U(x-m_0 t)$ 不会与 $u(x, t)$ 首次相交于边界 $x=0$ 上.

总之, 在 Q_T 上, $U(x-m_0 t)$ 的值未到达零之前, 恒有 $U(x-m_0 t)\geqslant u(x, t)$.

因为 $U(x-m_0 t)$ 以匀速 m_0 向右移动, 所以, $U(x-m_0 t))$ 的零点迟早会移动到边界 $x=0$ 上. 记这一时刻为 t_0, 此时在 Q_T 上有 $U(x-m_0 t_0)\geqslant u(x, t_0)$, $u(0, t_0)=0$, 即定理成立.

参考文献:

[1] HUANG Z D. Asymptotic behavior of the generalized solution of infiltration problem with constant surface flux[J]. Acta Math Sinica, 1983, 26: 667—698.

[2] XIAO S T, HUANG Z D, ZHOU C Z. The infiltration problem with constant rate in partially saturated porous media[J]. Acta Math Appl Sinica, 1984, 1(2): 108—126.

[3] SU N, LI J G. The boundary value problem for the filtration equation in partially saturated porous media[J]. Acta Math Appl Sinica, 1984, 1(2): 180—192.

A Property of the Weak Solutions of the One-Dimensional Infiltration Problem when Outflow Is Larger than Inflow

FANG Ping[1], HUANG Zhi-da[2]

(1 College of Science, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China;
2 Dept. of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: In this paper, a property of the weak solutions of the one—dimensional problem was revealed, i.e. there must be a time t_0, in which the outflow boundary will be dry when outflow is larger than inflow.

Key words: infiltration; weak solution; outflow and inflow

【责任编辑　李晓卉】