复杂系统性能指标试验量的预报方法

金玲玲[1], 汪刘一[2], 黄 鹤[1]
(1 华南农业大学 理学院, 广东 广州 510642; 2 华南农业大学 工程学院, 广东 广州 510642)

摘要: 从复杂系统性能指标评估的精确性和可信性方面, 研究了复杂系统试验量的确定. 考虑到复杂系统试验量的确定与复杂系统性能指标评估方法有关, 故以经典统计评估方法为例, 说明试验量的确定方法, 该方法具有通用性, 并以示例进行了说明.

关键词: 试验量的确定; 评估方法; 成败型分布; 正态分布
中图分类号: O212.1　　文献标识码: A　　文章编号: 1001—411X (2004) 04—0111—03

A new estimation method of throughput of experimentation in testing complicated systems

JIN Ling-ling[1], WANG Liu-yi[2], HUANG He[1]
(1 College of Science, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China;
2 College of Engineering, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China)

Abstract: This paper describes how to determine necessary throughput of experimentation in testing complicated systems based on reliability and accuracy analysis of estimating parameters of complicated system. It is a fact that necessary throughput of experimentation in complicated system is related to system parameters estimation method. An example was used traditional statistical method as, and propose an estimation method to determine necessary throughput of experimentation. The methods are elaborated with real cases.

Key words: experimentation throughput; estimation method; success-failure distribution; normal distribution

为了保证复杂系统性能指标评估的精确性和可信性, 确定其所需的试验量是复杂系统试验的重要问题之一. 显然, 随着试验次数的增加, 性能指标评估的精度会提高, 但是会出现增加费用、延长试验期限等问题. 文献[1、2] 应用 Bayes 序贯决策方法, 考虑了试验费用及生产方和使用方风险的情况下, 将鉴定方法与试验方法结合起来考虑, 给出最佳鉴定方案和试验量. 复杂系统试验量的确定与其性能指标评估方法有关. 对于性能指标的估计问题, 设性能指标为未知参数 θ, 假设进行了 n 次试验, 获得试验数据 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 对性能指标 θ 进行估计, 估计量 θ_n 是试验数据所构成的某个统计量. 它的一些统计性质与试验量 n 有关. 这样对估计 θ_n 作出某些要求, 就可以确定试验量 n 的大小. 一般用 2 种方法来确定性能指标估计问题的试验量[3]: (1) 对估计 θ_n 的精度 $\mathrm{var}(\theta_n)$ 提出要求, 来确定试验量 n; (2) 估计 θ_n 对复杂系统未知性能指标 θ 的估计误差 $\theta_n - \theta$, 给定了误差界 ε 与置信度 P_g, 来确定试验量 n, 保证置信度 P_g 的置信区间为 $(\theta_n - \varepsilon, \theta_n + \varepsilon)$.

对于性能指标的评定问题, 试验量 n 的确定一般采用这样的方法: 给定生产方风险, 并且给定了误差界限以及在此误差界限上的使用方风险, 不能超过给定值. 这样, 对于一定的检验方法, 可以确定试验量的大小.

众所周知, 对复杂的系统, 在试验之前的各个阶段可以得到关于这些系统性能指标的验前信息. 要求确定评估复杂系统性能指标的试验量, 一般有 2 种情况: 根据验前信息预测所需的试验量; 根据试验分析结果确定后续所需的试验量.

应用不同的评估方法, 试验量是不同的, 下面以

收稿日期: 2003—12—22　　作者简介: 金玲玲 (1963—), 女, 讲师, 硕士.

经典统计评估方法为例, 说明试验量的确定方法.

1 根据先验信息预测所需的试验量

从关于试验量的先验信息的完备性角度来看, 分2种情况:(1)已知性能指标 θ 的先验分布密度;(2)性能指标 θ 的先验分布密度未知, 而性能指标 θ 的某些数字特征(数学期望、方差等)是已知的.

在制定复杂系统试验规划时, 第2种情况是最典型的, 下面将依次讨论上述2种情况下试验量的确定方法.

1.1 成败型试验

按照成败型试验, 这种试验的结果从属于互相排斥的2个:成功或失败, 而试验本身是独立的和同分布的.

为了预报所需的试验量, 建立试验次数和区间估计之间的联系, 即试验量 n 是置信下限 P_H、置信上限 P_b、故障数 τ 和置信度 P_g 的函数, 可由下列方程计算[4]:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\tau}\frac{n!}{k!(n-k)}P_H^{n-k}(1-P_H)^K=1-P_g,\\ \sum_{k=0}^{\tau}\frac{n!}{k!(n-k)!}P_b^{n-k}(1-P_b)^K=P_g,\end{aligned}\tag{1}$$

式(1)一方面在有具体试验结果时可得到无故障概率的置信上、下限;另一方面求解这一方程可以预报所需的试验次数, 以便于给定置信度检验系统的性能指标.

复杂系统的无故障率要求非常高, 在预报所需试验量时不应期望有大量用于试验的试验样本, 于是在第1近似法中可以认为在试验时出现故障很少, 因而可以认为 $\tau\to 0$. 这时, 式(1)可以表示为

$$P_H^n\to 1-P_g,\quad P_b^n=P_g\tag{2}$$

由此得出试验量

$$n=\ln(1-P_g)/\ln P_H.$$

如果计划试验可能出现一次故障, 那么由式(1)就得出关系式

$$P_H^n+n(1-P_H)P_H^{n-1}=1-P_g,\tag{3}$$

$$P_b^n+n(1-P_b)P_b^{n-1}=P_g.\tag{4}$$

为了减少规定的试验量, 并考虑到根据以前试验结果对被估计的性能参数的校正, 可以选择不太低的置信度 $P_g=0.8$.

例1 对给定的置信度 $P_g=0.8$, 已知复杂系统无故障率的置信下限为 $P_H=0.95$, 试计算试验时不发生一次故障或者在试验时只发生一次故障时试验所需的试验数量.

解:在试验中不发生故障时, 则

$$n=\ln 0.2/\ln 0.95=31,$$

在试验时只发生1次故障, 解式(4)显然是不可能的, 用逐次接近法可以求出

$$0.95^{59}+59(1-0.95)0.95^{58}=0.2$$

因此试验量 $n=59$.

1.2 正态分布试验

正态母体 X 的未知参数 θ, 设有试验子样 x_1, x_2, …, x_n, 构造子样的统计量 $\theta_n=\theta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 用来估计未知参数 θ, 于是统计量 θ_n 的一些统计性质与子样大小 n 有关. 此外, 试验样本量的确定与正态分布参数评估方法有关, 不同的评估方法试验样本量是不同的, 但试验样本量确定的基本思路是相同的, 本节以正态分布均值估计和方差检验的经典评估方法为例进行分析.

1.2.1 正态分布的均值估计 设试验子样 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $x_t\sim N(\mu, \sigma^2)$, $t=1, 2, \cdots, n$, 方差 σ^2 未知, 则均值 μ 的估计为

$$\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\tag{5}$$

估计精度为

$$\sigma_x=\sigma/\sqrt{n},\tag{6}$$

若是给出相对精度 σ_x/σ 不超过百分数 γ 的要求, 则子样大小 n 至少为

$$n\geqslant 1/\gamma^2.\tag{7}$$

构造统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\xi}{\bar{\sigma}/\sqrt{n}},\tag{8}$$

其中

$$\bar{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

则统计量 T 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布, 于是对于给定的显著水平 α, 置信水平 $P_g=1-\alpha$, 可以得到 $t_{\alpha/2}$, 使

$$P=\left(|\bar{X}-\zeta|<t_{\alpha/2}\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)=P_g$$

于是误差界 ε 为

$$\varepsilon=t_{\alpha/2}\cdot\bar{\sigma}/\sqrt{n},\tag{9}$$

对给定的误差界 ε, 由式(9)可以得到试验至少用量 n 满足

$$n=t_{\alpha/2}^2\bar{\sigma}^2/\varepsilon^2.\tag{10}$$

1.2.2 正态分布均方差的检验 考虑如下假设检验:

$$\begin{aligned}H_0&:\sigma\leqslant\sigma_0\\ H_1&:\sigma>\sigma_0\end{aligned}\tag{11}$$

式中, σ_0 为给定检验的常量.

设有试验子样 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $x_t\sim N(\mu, \sigma^2)$, $t=1, 2, \cdots, n$, 构造统计量 χ^2

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} S_n,$$

式中：

$$S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_n)^2$$

则在原假设 H_0 成立的条件下，统计量 $\chi^2 \sim \chi^2_{n-1}$，于是对给定的显著水平 α，可以得到 χ^2_α，使

$$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \alpha$$

因此得到如下检验方法：当 $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ 时，拒绝原假设 H_0；当 $\chi^2 \leqslant \chi^2_\alpha$ 时，不能拒绝原假设 H_0.

对于给定的生产方风险，当备择假设 H_1 成立时，要求使用方风险不能超过 β，此时试验量应满足什么要求？

在备择假设 H_1 成立的条件下，使用方风险为

$$\beta = P(\chi^2 \leqslant \chi^2_\alpha \mid \sigma = \lambda\sigma_0) = P\left(\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\chi^2_\alpha \mid \sigma = \lambda\sigma_0\right)$$

或

$$1-\beta = P\left(\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 > \frac{1}{\lambda^2}\chi^2_\alpha \mid \sigma = \lambda\sigma_0\right),$$

由概率 $1-\beta$，利用 χ^2 分布，可以得到 $\chi^2_{1-\beta}$，使

$$P(\chi^2 > \chi^2_{1-\beta}) = 1-\beta$$

则得出方程

$$\chi^2_{1-\beta} = \frac{1}{\lambda^2}\chi^2_\alpha, \tag{12}$$

式中：λ 为检出比.

对于给定的生产方和使用方风险，对于不同的检出比 λ，通过 χ^2 分布的仿真计算，可以计算试验量 n，使式(12)成立.

也可以通过 χ^2 分布分位值迫近正态分布分位值的关系，计算试验量 n：

$$n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_\alpha - \gamma\mu_\beta}{\gamma - 1}\right)^2. \tag{13}$$

例2　决定某设备寿命的参数用均方差为 0.2 的正态分布描述. 假设已知参数的先验估计值为 $x_\alpha = 1\,250$，求试验时以 $P_g = 0.09$ 的置信水平检验该设备寿命指标 $x_{TP} \geqslant 1\,000$ 的试验量.

解：由

$$\varepsilon = \frac{x_{TP} - x_\alpha}{x_\alpha} = \frac{|1\,000 - 1\,250|}{1\,250} = 0.2,$$

以式(10)为基础，利用 t 分布表得到

$$n = 4,\ \frac{t^2_{0.05}\gamma^2}{\varepsilon^2} = \frac{2.35^2 \times 0.04}{0.04} = 5.52 > 4$$

$$n = 5,\ \frac{t^2_{0.05}\gamma^2}{\varepsilon^2} = \frac{2.13^2 \times 0.04}{0.04} = 4.54 > 4$$

$$n = 6,\ \frac{t^2_{0.05}\gamma^2}{\varepsilon^2} = \frac{2.01^2 \times 0.04}{0.04} = 4.04 < 6$$

这样，所需用于试验的样本数量应当大于 5.

2　其他分布试验

对复杂系统性能参数进行估计，类似于正态分布试验，可以证明其他分布的试验次数与试验观测值的分布规律、置信水平 P_g 及误差界 ε 有关.

例如，对于在复杂系统可靠性估计中广泛使用的威布尔分布，可以证明其参数估计的试验量为

$$n \geqslant \frac{(\varepsilon + 1)^m}{2}\chi^2_{\alpha/2,2n}, \tag{14}$$

式中：$\chi^2_{\alpha/2,2n}$ 为自由度数 $2n$ 的 χ^2 分布的分位点；$\varepsilon = |\tilde{x} - \hat{x}| / \hat{x}$ 为误差界；$\hat{x}$ 为复杂系统性能参数的估计值；$\tilde{x}$ 为复杂系统要求的性能参数.

对于在复杂系统维修性估计中广泛使用的对数正态分布，可以证明其参数估计的试验量为

$$n \geqslant RQ, \tag{15}$$

其中

$$R = \ln(1+\eta^2)\left[1 + \frac{\ln(1+\eta)^2}{2}\right],\ Q = \frac{U_{\alpha/2}}{\varepsilon^2}$$

式中：$U_{\alpha/2}$ 为正态分布分位点；η 为验前已知的变系数，是已知性能参数先验估计的均方差.

3　结论

复杂系统性能指标验证问题是指在给定性能指标的前提下，确定系统要进行多少次试验或多长时间试验(考虑失效情况)才能验证系统的性能确实满足指标要求. 本文以经典统计评估方法为例，分析了确定所需试验量应考虑的因素，即取决于试验目的、要求性能指标评估方法、评估的精度、试验费用等其他一些因素，本文从复杂系统性能指标评估的精确性和可信性，研究了试验量的确定方法，该方法具有通用性.

参考文献：

[1]　张金槐，唐雪梅. Bayes 方法[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1989. 59－61.

[2]　BERGER J O. Statistic decision theory foundations, concepts and methods[M]. New York: Springverlag, 1986. 33－45.

[3]　潘承范. 武器弹药试验和检验的公算与统计[M]. 北京：国防工业出版社，1980. 111－125.

[4]　GANDHI S L, HENLEY J. Optimal availability of a complex system[R]. Houston Texas: University of Houston Cullen College of Engineering, 1990. 23－28.

【责任编辑　李晓卉】