第 25 卷 第 4 期
2004 年 10 月

华南农业大学学报
Journal of South China Agricultural University

Vol.25, No.4
Oct. 2004

一类带功能性捕食者-食饵系统解的渐近性

戴婉仪[1], 付一平[2]

(1 华南农业大学 理学院, 广东 广州 510642; 2 华南理工大学 应用数学系, 广东 广州 510640)

摘要: 研究了一类带功能性的具有周期系数的捕食者-食饵系统, 系统捕食者和食饵 2 个物种在有界区域 Ω 内的相互作用. 应用周期上、下解方法讨论系统的解的长时间渐近行为, 得到相应的正解在拟解之间.

关键词: 扩散; 捕食者-食饵系统; 渐近性

中图分类号: O175.29　　文献标识码: A　　文章编号: 1001－411X (2004) 04－0114－04

Asymptotic behavior of solution for a functionality predator-prey system

DAI Wan-yi[1]　FU Yi-ping[2]

(1 College of Science, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China;

2 Dept. of Applied Mathematics, South China Univ. of Tech., Guangzhou 510640, China)

Abstract: A kind of predator-prey system with periodic coefficients and functionality was discussed. In the system, predator and prey interact each other in a bounded domain Ω. An asymptotic behavior of the solution in predator-prey system is presented by applying periodic upper solution and lower solution. And a conclusion was drawn that the corresponding positive solution lies between the two quasisolutions.

Key words: diffusion; predator-prey system; asymptotic behavior

正平衡点和周期解的存在性和稳定性问题是数学思想对生物种群持久性问题的准确而又科学的反映, 种群的持续生存实际上是生态系统的一种稳定性. 本文利用单调方法[1]和周期系统的周期上下解方法[2], 讨论了方程组平衡解的全局稳定性以及方程组的解关于时间渐近性态, 从而得到本文的主要结果: 定理 1～3. 它对文献[3～5]中所研究的系统作了生物学意义下的改进, 添加了功能性反应函数.

研究一类带功能性的捕食者-食饵系统:

$$\begin{cases} u_t - d_1(t)\Delta u = \\ \quad u\left[a(x,t) - b(x,t)u - c(x,t)\dfrac{v}{1+h(x,t)u}\right], \\ \qquad x\in\Omega,\ t>0 \\ v_t - d_2(t)\Delta v = \\ \quad v\left[-e(x,t) - f(x,t)v + g(x,t)\dfrac{u}{1+h(x,t)u}\right], \\ \qquad x\in\Omega,\ t>0 \\ \boldsymbol{B}u(x,t) = \boldsymbol{B}v(x,t) = 0,\ x\in\partial\Omega,\ t>0, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\quad x\in\Omega \tag{2}$$

式中, $u(x,t)$和$v(x,t)$分别表示食饵和捕食者的种群密度, Ω是$\mathbb{R}^n$中具有光滑边界的有界区域, $a(x,t)$和$e(x,t)$分别表示食饵的出生率和捕食者的死亡率, 系数d_1, d_2, a, b, c, e, f, g和h都是正的、光滑的和关于时间t的T－周期函数, 系数的周期性反应了季节的变化. $u_0(x)\geqslant 0$, $v_0(x)\geqslant 0$, 边界算子$\boldsymbol{B}u = a_0\dfrac{\partial u}{\partial n} + b_0(x)u = 0 (x\in\partial\Omega)$, a_0, b_0满足$a=0$, $b_0=1$或$a_0=1$, $b_0(x)\geqslant 0$, $b_0(x)\in C(\partial\Omega)$, n是$\partial\Omega$的外法向.

1　预备

当$v=0$时, 对于方程

$$\begin{cases} u_t - d_1(t)\Delta u = \\ \quad u[a(x,t) - b(x,t)u], \\ \qquad x\in\Omega,\ t>0 \\ \boldsymbol{B}u(x,t) = 0,\quad x\in\partial\Omega,\ t>0 \end{cases} \tag{3}$$

有以下结论:

收稿日期: 2004－05－12　　作者简介: 戴婉仪(1971－), 女, 讲师, 硕士.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171032)

引理 1[6]　特征值问题

$$\phi_t - d_1(t)\Delta\phi - a(x,t)\phi = \sigma\phi,\ x\in\Omega,\ t>0$$
$$\boldsymbol{B}\phi = 0,\ \ x\in\partial\Omega,\ t>0$$

ϕ 是 T-周期的，有一个主特征值 $\sigma_1(a)$和一个正的主特征函数，且 $\sigma_1(a)$关于 a 是单调减少和连续的．满足

(1)如果 $\sigma_1(a)\geqslant 0$，则对每个非负初始函数，方程(3)的零解是全局渐近稳定的；

(2)如果 $\sigma_1(a)<0$，则方程(3)有一个正的周期解 $\theta(x,t)$，且对每个非负的、非平凡的初始函数，它是全局渐近稳定的．

定义 1　若光滑 T－周期函数$(\bar u,\bar v)$和$(\underline{u},\underline{v})$满足

$$\bar u_t - d_1(t)\Delta\bar u = \bar u\left[a(x,t)-b(x,t)\bar u - c(x,t)\frac{\underline{v}}{1+h(x,t)\bar u}\right],\quad x\in\Omega,\ t>0$$

$$\bar v_t - d_2(t)\Delta\bar v = \bar v\left[-e(x,t)-f(x,t)\bar v + g(x,t)\frac{\bar u}{1+h(x,t)\bar u}\right],\quad x\in\Omega,\ t>0$$

$$\underline{u}_t - d_1(t)\Delta\underline{u} = \underline{u}\left[a(x,t)-b(x,t)\underline{u} - c(x,t)\frac{\bar v}{1+h(x,t)\underline{u}}\right],\quad x\in\Omega,\ t>0$$

$$\underline{v}_t - d_2(t)\Delta\underline{v} = \underline{v}\left[-e(x,t)-f(x,t)\underline{v} + g(x,t)\frac{\underline{u}}{1+h(x,t)\underline{u}}\right],\quad x\in\Omega,\ t>0$$

$$\boldsymbol{B}\bar u = \boldsymbol{B}\underline{u} = \boldsymbol{B}\bar v = \boldsymbol{B}\underline{v} = 0,\ \ x\in\partial\Omega,\ t>0$$

则$(\bar u,\bar v)$和$(\underline{u},\underline{v})$分别称为系统(1)的 T－周期拟解．

引理 2[2]　若系统(1)存在一对 T－周期上、下解$(\tilde u,\tilde v)$和$(\hat u,\hat v)$，则系统(1)存在一对 T-周期拟解$(\bar u,\bar v)$和$(\underline{u},\underline{v})$满足：

$$\begin{matrix}\hat u\leqslant\underline{u}\leqslant\bar u\leqslant\tilde u,\\ \hat v\leqslant\underline{v}\leqslant\bar v\leqslant\tilde v,\end{matrix}\quad x\in\Omega,\ t>0$$

且当初始函数满足

$$\begin{matrix}\hat u(x,0)\leqslant u_0(x)\leqslant\tilde u(x,0),\\ \hat v(x,0)\leqslant v_0(x)\leqslant\tilde v(x,0),\end{matrix}\quad x\in\Omega$$

时，方程(1)、(2)相应的解(u,v)满足

$$\begin{cases}\underline{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\bar u(x,t),\\ \underline{v}(x,t)\leqslant v(x,t)\leqslant\bar v(x,t),\end{cases}\quad x\in\Omega,\ t\to\infty$$

证明可见文献[2]．

系统(1)的 T－上、下解的定义，详见文献[2]．

2　定理及证明

对于方程(1)(2)显然(0,0)是其下解．

若取常数

$$P>\max\left\{\frac{a_{\mathrm M}}{b_{\mathrm m}},\ \|u_0\|_\infty\right\},$$

$$Q>\max\left\{\frac{-e_{\mathrm m}+g_{\mathrm M}\dfrac{P}{1+h_{\mathrm m}P}}{f_{\mathrm m}},\ \|v_0\|_\infty\right\},$$

其中

$$a_{\mathrm M}=\max_{x\in\Omega,\ t\geqslant 0}\{a(x,t)\},$$
$$a_{\mathrm m}=\min_{x\in\Omega,\ t\geqslant 0}\{a(x,t)\},$$

$b_{\mathrm m}, e_{\mathrm m}, g_{\mathrm M}, h_{\mathrm m}, f_{\mathrm m}$ 类似，则(P,Q)是方程(1)(2)的上解．由文献[2]中的定理 2.1 可知，方程(1)(2)存在惟一解(u,v)，且满足

$$(0,0)\leqslant(u,v)\leqslant(P,Q),\quad x\in\Omega,\ t>0$$

由引理 1 可知，当 $\sigma_1(a)<0$ 时，方程(3)存在正周期解 $\theta_1(x,t)$，而当 $\sigma_1\left(-e+g\dfrac{\theta_1}{1+h\theta_1}\right)<0$ 时，方程

$$\begin{cases}v_t - d_2(t)\Delta v = v\left[-e(x,t)-f(x,t)v+g(x,t)\dfrac{\theta_1}{1+h(x,t)\theta_1}\right],\\ \qquad x\in\Omega,\ t>0\\ \boldsymbol{B}v=0,\ \ x\in\partial\Omega,\ t>0\end{cases}$$

存在正周期解 $\theta_2(x,t)$．

定理 1　若 $\sigma_1(a)\geqslant 0$，$\sigma_1(-e)\geqslant 0$ 时，则方程(1)(2)的解(u,v)满足

$$(u,v)\to(0,0),\ x\in\Omega,\ t\to\infty$$

证明　由 u,v 的非负性，有

$$u_t - d_1(t)\Delta u\leqslant u[a(x,t)-b(x,t)u].$$

根据比较原理 $u\leqslant U$，$x\in\Omega$，$t>0$，其中 U 是方程

$$\begin{cases}U_t - d_1(t)\Delta U = U[a(x,t)-b(x,t)U]\\ \qquad x\in\Omega,\ t>0\\ \boldsymbol{B}U(x,t)=0,\ \ x\in\partial\Omega,\ t>0\\ U(x,0)=u_0(x)\end{cases}\tag{4}$$

的解．根据引理 1，若 $\sigma_1(a)\geqslant 0$，则方程(4)的解有

$$U\to 0,\ \ x\in\Omega,\ t\to\infty$$

从而

$$u\to 0,\ \ x\in\Omega,\ t\to\infty$$

对任给 $\varepsilon>0$，$\exists T_0>0$，使得 $t>T_0$ 时，有 $u\leqslant U\leqslant\varepsilon$．

由于$\dfrac{u}{1+h(x,t)u}$是单调增加的, 因而

$$v_t-d_2(t)\Delta v\leqslant v\left[-e(x,t)-f(x,t)v+g(x,t)\frac{\varepsilon}{1+h(x,t)\varepsilon}\right],\quad x\in\Omega,\ t>T_0$$

根据比较原理, $v\leqslant V$, $x\in\Omega$, $t>T_0$, 其中 V 是方程

$$\begin{cases}V_t-d_2(t)\Delta V=V\left[-e(x,t)-f(x,t)V+g(x,t)\dfrac{\varepsilon}{1+h(x,t)\varepsilon}\right], \\ \qquad x\in\Omega,\ t>T_0 \\ \boldsymbol{B}V(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega,\ t>T_0 \\ V(x,T_0)=v_0(x,T_0)\end{cases}$$

的解.

因为 $\sigma_1(-e)>0$, 则对充分小的 ε, 必有 $\sigma\left(-e+g\dfrac{\varepsilon}{1+h\varepsilon}\right)\geqslant 0$, 再根据引理 1, 有 $V\to 0$, $x\to\Omega$, $t>T_0$, 从而有 $v\to 0$, $x\in\Omega$, $t\to\infty$.

定理 2 若 $\sigma_1(a)<0$, $\sigma_1\left(-e+g\dfrac{\theta_1}{1+h\theta_1}\right)>0$, 且 $u_0(x)$不恒为零, 则方程(1)(2)的解(u,v)满足

$$(u,v)\to(\theta_1,0),\ x\in\Omega,\ t\to\infty.$$

证明 若 $\sigma_1(a)<0$ 时, 显然$(\theta_1,0)$为方程(1)的半平凡周期解. 由引理 1 知, 此时方程(4)的解 U 满足

$$U\to\theta_1,\ x\in\Omega,\ t\to\infty.$$

因而对任给 $\varepsilon>0$, 当 $\exists T_1>T_0$, $t>T_1$ 时, $u\leqslant U<\theta_1+\varepsilon$, 于是有

$$v_t-d_2(t)\Delta v\leqslant v\left[-e(x,t)-f(x,t)v+g(x,t)\frac{\theta_1+\varepsilon}{1+h(x,t)(\theta_1+\varepsilon)}\right],\quad x\in\Omega,\ t>T_1 \tag{5}$$

当 $\sigma_1\left(-e+g\dfrac{\theta_1}{1+h\theta_1}\right)>0$ 时, 对充分小的正数 ε, 有

$$\sigma_1\left[-e+g\frac{\theta_1+\varepsilon}{1+h(\theta_1+\varepsilon)}\right]\geqslant 0.$$

根据比较原理, $v\leqslant V$, $x\in\Omega$, $t>T_1$, 其中 V 是方程

$$\begin{cases}V_t-d_2(t)\Delta V=V\left[-e(x,t)-f(x,t)V+g(x,t)\dfrac{\theta_1+\varepsilon}{1+h(x,t)(\theta_1+\varepsilon)}\right], \\ \qquad x\in\Omega,\ t>T_1 \\ \boldsymbol{B}V(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega,\ t>T_1 \\ V(x,T_1)=v(x,T_1)\end{cases} \tag{6}$$

的解.

由引理 1 有, $V\to 0$, $t>T_1$, 从而 $v\to 0$, $x\in\Omega$, $t\to\infty$. 因而 $\exists T_2>T_1$, 使得当 $t>T_2$ 时, 有 $v<\varepsilon$, 于是

$$u_t-d_1(t)\Delta u\geqslant u[a(x,t)-b(x,t)u-c(x,t)\varepsilon],$$

由比较原理, 有 $u\geqslant U^{\varepsilon}$, $x\in\Omega$, $t>T_2$, 其中 U^{ε} 是下列方程

$$\begin{cases}U^{\varepsilon}_t-d_1(t)\Delta U^{\varepsilon}=U^{\varepsilon}[a(x,t)-b(x,t)U^{\varepsilon}-c(x,t)\varepsilon], \\ \qquad x\in\Omega,\ t>T_2 \\ \boldsymbol{B}U^{\varepsilon}(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega,\ t>T_2 \\ U^{\varepsilon}(x,T_2)=u(x,T_2)\end{cases}$$

的解.

对充分小 ε, 有 $\sigma_1(a-c\varepsilon)<0$, 故 $U^{\varepsilon}\to\theta_1$, $x\in\Omega$, $t\to\infty$, 由于 $U^{\varepsilon}\leqslant u\leqslant U$, 根据两边夹准则, 得到 $u\to\theta_1$, $x\in\Omega$, $t\to\infty$.

定理 3 若 $\sigma_1(a-c\theta_2)<0$, $\sigma_1\left(-e+g\dfrac{\Phi_1}{1+h\Phi_1}\right)<0$, 且 $u_0(x)$, $v_0(x)$不恒为 0, 则系统(1)存在一对 T—周期上、下解(θ_1,θ_2)和(Φ_1,Φ_2), 且方程(1), (2)的解(u,v)满足

$$(\underline{u},\underline{v})\leqslant(u,v)\leqslant(\bar{u},\bar{v}),\quad x\in\Omega,\ t\to\infty$$

其中$(\bar{u},\bar{v})$和$(\underline{u},\underline{v})$是方程(1)的一对周期拟解, 满足

$$\begin{matrix}\Phi_1\leqslant\underline{u}\leqslant\bar{u}\leqslant\theta_1, \\ \Phi_2\leqslant\underline{v}\leqslant\bar{v}\leqslant\theta_2,\end{matrix}\quad x\in\Omega,\ t>0.$$

证明 当 $\sigma_1(a-c\theta_2)<0$ 时, 方程

$$\begin{cases}\Phi_{1t}-d_1(t)\Delta\Phi_1= \\ \quad\Phi_1[a(x,t)-b(x,t)\Phi_1-c(x,t)\theta_2] \\ \boldsymbol{B}\Phi_1=0\end{cases}$$

存在正周期解 $\Phi_1(x,t)$. 由比较原理可知 $\Phi_1\leqslant\theta_1$, $x\in\Omega$, $t\geqslant 0$.

当 $\sigma_1\left[-e+g\dfrac{\Phi_1}{1+h\Phi_1}\right]<0$ 时, 方程

$$\begin{cases}\Phi_{2t}-d_2(t)\Delta\Phi_2= \\ \quad\Phi_2\left[-e(x,t)-f(x,t)\Phi_2+g(x,t)\dfrac{\Phi_1}{1+h(x,t)\Phi_1}\right] \\ \boldsymbol{B}\Phi_2=0\end{cases}$$

存在正周期解 $\Phi_2(x,t)$. 根据比较原理, 有 $\Phi_2\leqslant\theta_2$, $x\in\Omega$, $t\geqslant 0$.

注意到(θ_1,θ_2)和(Φ_1,Φ_2)是方程(1)的一对 T—周期上、下解. 由引理 2, 方程(1)存在一对 T—周期拟解$(\bar{u},\bar{v})$和$(\underline{u},\underline{v})$, 满足

$$\begin{matrix} \Phi_1 \leqslant \underline{u} \leqslant \bar{u} \leqslant \theta_1, \\ \Phi_2 \leqslant \underline{v} \leqslant \bar{v} \leqslant \theta_2, \end{matrix} \quad x \in \Omega,\ t > 0$$

且当初值满足

$$\begin{matrix} \Phi_1(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant \theta_1(x,0), \\ \Phi_2(x,0) \leqslant v_0(x) \leqslant \theta_2(x,0), \end{matrix} \quad x \in \Omega$$

时, 方程(1)(2)的解满足

$$\begin{cases} \underline{u}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), \\ \underline{v}(x,t) \leqslant v(x,t) \leqslant \bar{v}(x,t), \end{cases} \quad x \in \Omega, t \to \infty. \tag{7}$$

下面证明对任一非负、非平凡的初值(u_0, v_0), 方程(1), (2)的解都有式(7)的渐近性质.

由$\sigma_1(a)$关于a是单调减少的, 当$\sigma_1(a - c\theta_2) < 0$时, 有$\sigma_1(a) \leqslant \sigma_1(a - c\theta_2) < 0$, 由定理2可知, $\exists T_1 > T_0$, 当$t > T_1$时, $u \leqslant U < \theta_1 + \varepsilon$, 以及式(5)成立, 且$v \leqslant V$, V是方程(6)的解. 对充分小的ε, 由于

$$\sigma_1\left[-e + g\frac{\theta_1 + \varepsilon}{1 + h(\theta_1 + \varepsilon)}\right] < \sigma_1\left(-e + g\frac{\Phi_1}{1 + h\Phi_1}\right) < 0,$$

根据引理1, 有$V \to \theta_2$, $x \in \Omega$, $t \to \infty$, 因而$\exists T_2' > T_1$, 当$t > T_2'$时, $v \leqslant V < \theta_2 + \varepsilon$. 于是

$$u_t - d_1(t)\Delta u \geqslant u\left[a(x,t) - b(x,t)u - c(x,t)\frac{\theta_2 + \varepsilon}{1 + h(x,t)u}\right] \geqslant$$
$$u[a(x,t) - b(x,t)u - c(x,t)(\theta_2 + \varepsilon)],$$
$$x \in \Omega,\ t > 0$$

由比较原理, $u \geqslant \underline{U}$, 其中$\underline{U}$是

$$\begin{cases} \underline{U}_t - d_1(t)\Delta\underline{U} = \underline{U}[a(x,t) - b(x,t)\underline{U} - c(x,t)(\theta_2 + \varepsilon)], \\ \qquad x \in \Omega,\ t > T_2' \\ \boldsymbol{B}\underline{U} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > T_2' \\ \underline{U}(x, T_2') = u(x, T_2') \end{cases}$$

的解.

由于ε的充分小以及$\sigma_1(a - c\theta_2) < 0$, 根据引理1 $\underline{U} \to \Phi_1$, $x \to \Omega$, $t \to \infty$, 因此$\exists T_3' > T_2'$, 当$t > T_3'$时, $u \geqslant \underline{U} > \Phi_1 - \varepsilon$, 于是

$$v_t - d_2(t)\Delta v \geqslant v\left[-e(x,t) - f(x,t)v + g(x,t)\frac{\Phi_1 - \varepsilon}{1 + h(x,t)(\Phi_1 - \varepsilon)}\right],$$
$$x \in \Omega,\ t > T_3'$$

由比较原理$v \geqslant \underline{V}$, 其中$\underline{V}$是方程

$$\begin{cases} \underline{V}_t - d_2(t)\Delta\underline{V} = \underline{V}\left[-e(x,t) - f(x,t)\underline{V} + g(x,t)\dfrac{\Phi_1 - \varepsilon}{1 + h(\Phi_1 - \varepsilon)}\right], \\ \qquad x \in \Omega,\ t > T_3' \\ \boldsymbol{B}\underline{V} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > T_3' \\ \underline{V}(x, T_3') = v(x, T_3') \end{cases}$$

的解.

由于ε的充分小以及$\sigma_1\left(-e + c\dfrac{\Phi_1}{1 + h\Phi_1}\right) < 0$, 根据引理1 $\underline{V} \to \Phi_2$, $x \to \Omega$, $t \to \infty$, 因此$\exists T_4' > T_3'$, 当$t > T_4'$时, $v \geqslant \underline{V} > \Phi_2 - \varepsilon$.

综上所述, 得到(θ_1, θ_2)和(Φ_1, Φ_2)是系统(1)的上、下解, 即$\Phi_1 \leqslant u \leqslant \theta_1$, $\Phi_2 \leqslant v \leqslant \theta_2$, $x \in \Omega$, $t > T_4'$, 在方程(1)(2)中, 若取T_4'为初始时间, 则可知方程(1)(2)的解具有式(7)的渐近性质.

注: 当$h(x,t) = 0$时, 与文献[3]结论一致.

参考文献:

[1] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999. 192: 213.

[2] ZHOU L, FU Y P. Existence and stability of periodic quasisolutions in nonlinear parabolic systems with discrete delays[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 250: 139—161.

[3] 付一平, 戴婉仪. 一类含捕食者—食饵系统解的渐近性[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2003, 31(2): 88—90.

[4] BROWN K J, HESS P. Positive periodic solutions of predator-prey reaction-diffusion system[J]. Nonl Anal TMA, 1991, 16: 1147—1158.

[5] 李大华. 一类捕食者-食饵系统的时间周期解的存在性与稳定性[J]. 应用数学学报, 1999, 22(3): 413—421.

[6] WEI F, XIN L. Asymptotic periodicity in diffusive logistic equations with discrete delays[J]. Nonl Anal TMA, 1996, 26(2): 171—178.

【责任编辑 李晓卉】