关于新的预条件相容线性系统

周裕中，徐小红
（华南农业大学 理学院，广东 广州 510642）

摘要：对新的预条件线性系统中，当 A 为奇异矩阵时的收敛性进行了研究，得到一些充分必要条件。

关键词：预条件；AOR迭代方法；收敛；M－矩阵；严格下三角矩阵；性质 c
中图分类号：O151.21　　文献标识码：A　　文章编号：1001－411X（2005）02－0112－03

Study on the new preconditioned consistent linear systems

ZHOU Yu-zhong，XU Xiao-hong
（College of Sciences，South China Agric. Univ.，Guangzhou 510642，China）

Abstract：The sufficient and necessary conditions for the AOR methods convergence when A is a singular matrix is presented in the paper.

Key words：precondition；AOR iterative method；convergence；M-matrix；strictly lower triangular matrix；property c

考虑线性方程组

$$Ax = b, \tag{1}$$

其中，A 是 $n\times n$ 方阵，x 与 b 均为 n 维向量，求解线性方程组式(1)，当 A 是大型的稀疏矩阵或是重要的特殊矩阵，例如：A 是M-矩阵、对称正定矩阵时，常采用迭代法求解．该方法与直接方法相比有许多优点．

对于 A 的任意分裂 $A=M-N$，M 是非奇异的，求解线性方程组(1)的基本迭代方法是：

$$x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b,\ (k=0,1,2,3,\cdots)$$

其中，$M^{-1}N$ 称迭代矩阵．通常设 $A=D-L-U$，其中 D、L 和 U 分别是 A 的对角、严格下三角矩阵和严格上三角矩阵．古典 Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法的迭代矩阵分别为 $J=D^{-1}(L+U)$ 和 $T=(D-L)^{-1}U$，AOR 方法即加速超松弛方法的迭代矩阵为 $L_{(\gamma,\omega)}=(I-\gamma L)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-\gamma)L+\omega U]$．

在本文中，总假设 A 为 Z-矩阵，$A=I-L-U$，其中，I 为单位矩阵，L 为严格下三角矩阵，U 为一般的非负矩阵．为了加速迭代矩阵收敛速度和改善收敛性，常用某些非奇异矩阵 P 对式(1)进行预处理，即考虑

$$PAx=Pb, \tag{2}$$

称解式(2)的 AOR 迭代法为预条件 AOR 迭代方法(PAOR 方法)．

最近，关于一类新的解线性方程组预处理技术由 Evans 等[1] 得到，其给出预条件矩阵分别为 $P=I+S_1$ 和 $P=I+S_2$，其中

$$S_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a_{n,1} & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$S_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{1,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{4}$$

由式(1)可得预条件线性系统

$$A_1x=b_1, \tag{5}$$

$$A_2x=b_2, \tag{6}$$

其中，$A_1=(I+S_1)A$，$b_1=(I+S_1)b$，$A_2=(I+S_2)A$，$b_2=(I+S_2)b$．其考虑了式(2)的 AOR 迭代方法，证明了 PAOR 方法比 AOR 方法收敛更快．

本文主要给出解相容线性方程组预条件 AOR 方法(PAOR 方法)的收敛分析．

1 引理

引理 1[2]　设 A 是 Z-矩阵，则下列各款是等价的：① A 是非奇异 M-矩阵；② 有一正向量 x，使得

收稿日期：2004－03－18　　作者简介：周裕中(1969－)，男，讲师，硕士；E-mail：zhouyuzhong163.com@163.com

$Ax\gg 0$; ③A 的所有主子矩阵是非奇异 M-矩阵; ④ A 的所有主子式为正.

引理 2[2]　设 $A=M-N$, A 为 M-矩阵, 则 $\rho(M^{-1}N)<1\left(\rho(M^{-1}N)=1\right)$ 的充要条件是 A 为非奇异(奇异)M-矩阵.

引理 3　设 A 是 Z-矩阵, 则 A 为非奇异(奇异) M-矩阵当且仅当 $A_1=(I+S_1)A$ 是非奇异(奇异) M-矩阵.

证明　情况 1: 设 A 是非奇异 M-矩阵, 且 $A_1\equiv(I+S_1)A=(a'_{ij})$, 则

$$a'_{ij}=\begin{cases}a_{i,j}, & 1\leqslant i<n\\ a_{n,j}-a_{n,1}a_{1,j}. & i=n\end{cases}$$

由于 A 为 Z-矩阵, 则 $a'_{ij}\leqslant 0\ (i\neq j)$, 即 A_1 是 Z-矩阵. 因为 A 是非奇异 M-矩阵, 所以由引理 1 存在 $x\gg 0$ 使得 $Ax\gg 0$. 也有 $A_1x=(I+S_1)Ax\gg 0$, 又由引理 1 得 A_1 是非奇异 M-矩阵.

若 A_1 是非奇异 M-矩阵, 因为 $I+S_1$ 是非奇异的, $(I+S_1)^{-1}$ 为 M-矩阵, 而且 A 是 Z-矩阵, 由文献 [2] 第二章推论 3.4 得 $(I+S_1)^{-1}A_1=A$ 为非奇异 M-矩阵.

情况 2: 假设 A 是奇异 M-矩阵, 设 $A=(I-L)-U$ 是 A 的 M-分裂, 其中 $L\geqslant 0$ 为 A 的严格下三角阵, U 为一般的非负矩阵, 那么由引理 2 得 $\rho\left((I-L)^{-1}U\right)=1$. 设 $A_1=(I+S_1)A=(I+S_1)(I-L)-(I+S_1)U\equiv M-N$, 设

$$L=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a'_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a'_{3,1} & -a'_{3,2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -a_{n,1} & -a'_{n,2} & \cdots & -a'_{n,n-1} & 0\end{bmatrix}$$ 则

$$M=(I+S_1)(I-L)=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a'_{2,1} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ -a'_{3,1} & -a'_{3,2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & -a'_{n,2} & \cdots & -a'_{n,n-1} & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a'_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -a'_{3,1} & -a'_{3,2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & -a'_{n,2} & \cdots & -a'_{n,n-1} & 0\end{bmatrix}\equiv$$

$I-B$.

因此, $B\geqslant 0$, $\rho(B)<1$. 故 M 为非奇异 M-矩阵. 又 $N=(I+S_1)U\geqslant 0$, 则 $A_1\equiv M-N$ 也是 A_1 的 M-分裂, 且 $\rho(M^{-1}N)=\rho\left((I-L)^{-1}U\right)=1$, 同样由引理 2 得 A_1 是奇异 M-矩阵. 反之, 假设 A_1 是奇异 M-矩阵, 类似 A_1 为非奇异 M-矩阵情况证明 A 为非奇异 M-矩阵, 可证得 A 是奇异 M-矩阵.

综上所述, 引理 3 得证.

引理 4[2]　M-矩阵 A 具有性质 c 的充要条件是 $\mathrm{ind}_0(A)\leqslant 1$.

引理 5　A 是具有性质 c 的 M-矩阵的充要条件为 A_1 是具有性质 c 的 M-矩阵.

证明　若 A 或 A_1 是非奇异的, 结论显然. 下面, 总认为 A 或 A_1 是奇异的. 设 A 是具有性质 c 的 M-矩阵, 由引理 3 可知, A_1 是奇异 M-矩阵. 因为 A 具有性质 c, 由引理 4 有 $\mathrm{ind}_0(A)=1$. 设 $A=(I-L)-U$ 为 M-分裂, L、U 分别是 A 的严格下和一般的非负矩阵. 有 $\rho\left((I-L)^{-1}U\right)=1$, 又由引理 3 的证明有

$$A_1=(I+S_1)A=$$
$$(I+S_1)(I-L)-(I+S_1)U=M-N$$

为 M-分裂,

$$\rho(M^{-1}N)=\rho\left((I-L)^{-1}U\right)=1,$$

则有

$$\mathrm{ind}_0(A_1)=\mathrm{ind}_0(M^{-1}N)=$$
$$\mathrm{ind}_0\left((I-L)^{-1}U\right)=\mathrm{ind}_0(A)=1,$$

从引理 4, 可知 A_1 是具有性质 c 的 M-矩阵, 必要性得证. 由于上述每一步均可逆, 由此得充分性.

引理 6[2]　设 A 为 M-矩阵且 $A=(a_{i,j})$, $a_{i,i}>0$, $i\in\langle n\rangle$, 则 A 具有性质 c 的充要条件是 $D^{-1}A$ 为具有性质 c 的 M-矩阵.

引理 7[2]　设 H 为谱半径 $\rho(H)=1$ 的非负矩阵, 设 $T=I-H$, $H_b=(1-b)I+bH$, 则下列各款是等价的:

① T 是具有性质 c 的 M-矩阵;

②存在 b, $b\in(0,1)$, 使得 H_b 是收敛矩阵;

③对区间 $(0,1)$ 中的每个 b, 有 H_b 是收敛矩阵.

引理 8[3]　设 $A\in R^{n\times n}$, $A=M-N$ 为 M-分裂, 则 $M^{-1}A$ 是 M-矩阵的充要条件是 A 为 M-矩阵.

引理 9　$L_{(\gamma,\omega)}=(I-\gamma L)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-\gamma)L+\omega U]=(1-\omega)I+\omega L_{(\gamma,1)}$

证明　　$L_{(\gamma,\omega)}=$

$$(I-\gamma L)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-\gamma)L+\omega U]=$$
$$(I-\gamma L)^{-1}[(I-\gamma L)-\omega(I-\gamma L)+\omega(1-\gamma)L+\omega U]=$$
$$(1-\omega)I+\omega(I-\gamma L)^{-1}[(1-\gamma)L+U]=$$

$$(1-\omega)\boldsymbol{I}+\omega\boldsymbol{L}_{(\gamma,1)}.$$

2 定理及证明

定理 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})$ 是奇异 M-矩阵, 且 $a_{1,n}a_{n,1}<1$. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{U}$ 分别是严格下三角、一般的非负矩阵, 令

$$\boldsymbol{A}_1=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{U}_1,$$

这里 $\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{U}_1$ 分别为 $\boldsymbol{A}_1$ 的对角、严格下三角和一般的非负矩阵. 设

$$\boldsymbol{L}_{(\gamma,\omega)}=(\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}_1+(\omega-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\omega\boldsymbol{U}_1],$$

其中, $\gamma\in[0,1)$, $\omega\in(0,1)$, 则式(5)的 PAOR 迭代方法对于任意初始向量 $\boldsymbol{x}_0$ 都收敛于线性方程组的某个解 $\boldsymbol{x}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为具有性质 c 的M-矩阵.

证明 设

$$\boldsymbol{A}_1=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{U}_1=\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}_1)-\frac{1}{\omega}[(1-\omega)\boldsymbol{D}_1+(\omega-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\omega\boldsymbol{U}_1]=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N},$$

其中, $\boldsymbol{D}_1=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1-a_{1,n}a_{n,1})$, 设 $\boldsymbol{A}$ 是具有性质 c 的奇异 M-矩阵, 由引理 3、引理 5, 则 $\boldsymbol{A}_1=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{U}_1$ 也是具有性质 c 的奇异 M-矩阵, 即 $\mathrm{ind}_0(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1)=1$ 和

$$\rho(\boldsymbol{L}_1'+\boldsymbol{U}_1')=1,$$

这里 $\boldsymbol{L}_1'=\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{U}_1'=\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{U}_1$. 当 $0\leqslant\gamma<1$, $\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}_1'-\boldsymbol{U}_1'=(\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}_1')-[(1-\gamma)\boldsymbol{L}_1'+\boldsymbol{U}_1']=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1$ 为M-分裂, 则

$$\rho\left((\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}_1')^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}_1'+\boldsymbol{U}_1']\right)=1,$$

即 $\rho\left((\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{U}_1]\right)=1,$

故 $\mathrm{ind}_1\left((\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{U}_1]\right)=\mathrm{ind}_0(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1)=1.$

因此, $\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{U}_1]$ 是具有性质 c 的M-矩阵[4]. 显然,

$$(\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{U}_1]\geqslant 0,$$

由引理9 得

$$L'_{(\gamma,\omega)}=(\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}_1+(\omega-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\omega\boldsymbol{U}_1]=(1-\omega)\boldsymbol{I}+\omega(\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{U}_1],$$

再由引理 7 可知 $\boldsymbol{L}'_{(\gamma,\omega)}$ 收敛.

反之, 假设 AOR 迭代矩阵,

$$\boldsymbol{L}'_{(r,\omega)}=(\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}_1+(\omega-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\omega\boldsymbol{U}_1]=(1-\omega)\boldsymbol{I}+\omega(\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{U}_1]=(1-\omega)\boldsymbol{I}+\omega(\boldsymbol{D}_1-\gamma\boldsymbol{L}'_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}'_1+\boldsymbol{U}_1']$$

是收敛的. 由于 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{U}_1$ 是奇异Z-矩阵, 所以,

$$\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{L}'_1+\boldsymbol{U}'_1),\ \rho(\boldsymbol{L}'_1+\boldsymbol{U}'_1)\geqslant 1,$$

其中, $\boldsymbol{L}'_1=\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{U}'_1=\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{U}_1$. 当 $0\leqslant\gamma<1$ 时, 易知 $\rho\left((\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}'_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}'_1+\boldsymbol{U}'_1]\right)=1,$

而且 $(\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}'_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}'_1+\boldsymbol{U}'_1]\geqslant 0,$

由引理 7 可得

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}'_1)^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{L}'_1+\boldsymbol{U}'_1]$$

是具有性质 c 的M－矩阵. 由于

$$(\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}'_1)\boldsymbol{A}_1=(\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}'_1)-[(1-\gamma)\boldsymbol{L}'_1+\boldsymbol{U}'_1]=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}'_1)-\boldsymbol{U}'_1$$

为M-分裂和 $\boldsymbol{A}_1$ 为具有性质 c 的M-矩阵, 由引理 8, 我们有 $(\boldsymbol{I}-\gamma\boldsymbol{L}'_1)\boldsymbol{A}_1$ 也是M-矩阵, 这意味着

$$\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{L}'_1+\boldsymbol{U}'_1)=\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1$$

为M-矩阵. 有

$$\mathrm{ind}_0(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1)=\mathrm{ind}_0(\boldsymbol{A}'_1)=1,$$

因此, $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}_1$ 是M-矩阵且具有性质c, 又由引理5 和引理6, 我们可知 $\boldsymbol{A}$ 是具有性质 c 的M-矩阵. 至此, 定理 1 已得证.

类似定理 1, 我们有定理 2.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})$ 是奇异 M-矩阵, 且 $a_{1,n}a_{n,1}<1$. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{L}$ 是严格下三角的非负矩阵, $\boldsymbol{U}$ 是一般的非负矩阵. 令

$$\boldsymbol{A}_2=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}_2)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{U}_2,$$

这里 $\boldsymbol{S}_2$ 形如式(4), $\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{L}_2$、$\boldsymbol{U}_2$ 分别为 $\boldsymbol{A}_2$ 的对角、严格下三角和一般的非负矩阵. 设

$$\boldsymbol{L}''_{(\gamma,\omega)}=(\boldsymbol{D}_2-\gamma\boldsymbol{L}_2)^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}_2+(\omega-\gamma)\boldsymbol{L}_2+\omega\boldsymbol{U}_2],$$

其中 $\gamma\in[0,1)$, $\omega\in(0,1)$. 则式(6)的 PAOR 迭代方法对于任意初始向量 $\boldsymbol{x}_0$ 都收敛于线性方程组的某个解 $\boldsymbol{x}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为具有性质 c 的M-矩阵.

参考文献:

[1] EVANS D J, MARTINS M M, TRIGO M E. The AOR iterative method for new preconditioned linear systems[J]. Comput Appl Math, 2001, 132(2): 461－466.

[2] 张谋成, 黎 稳. 非负矩阵论[M]. 广州: 广东高等教育出版社, 1995. 51－58, 70－73, 101－102.

[3] LI W, SUN W W. Modified gauss-seidel methods and jacobi methods for Z-matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2000, (317): 227－240.

[4] SCHNEIDER H. Thorems on M-splittings of a singular M-matrix which depend on graph structure[J]. Linear Algebra Appl, 1984, (84): 161－189.

【责任编辑 李晓卉】