

亚纯函数的动力学性质

杨德贵¹, 张焜毅²

(1 华南农业大学理学院, 广东广州 510642; 2 中山大学肿瘤防治中心, 广东广州 510275)

摘要:把 Baker 在整函数迭代函数论方面的结果推广到亚纯函数, 并利用该结果研究由亚纯函数 f 的迭代函数的反函数分支构成的函数族的正规性, 证明了定义在具有某些性质的区域 D 上的该类函数族的所有极限函数都是复常数且属于亚纯函数 f 的 Julia 集合中.

关键词:反函数分支; 迭代; 亚纯函数; 周期点

中图分类号: O174.5

文献标识码: A

文章编号: 1001-411X (2005) 04-0114-04

Dynamics of meromorphic functions

YANG De-gui¹, ZHANG Kun-yi²

(1 College of Sciences, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China;

2 Department of radiation oncology, cancer center, SunYat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: In this paper, the normality of the family of inverse branches of meromorphic functions is investigated. First, a result obtained by Baker is extended. Second, by using the extended result, it is proved that all limit functions of the family of inverse branches of meromorphic functions f are complex constant and belong to the Julia set of f , which are all defined and regular in the some complex domain D .

Key words: branch of inverse function; iteration; meromorphic function; periodic point

反映自然界许多现象的数学模型都与迭代有关, 最常引用的例子是来自人口生物学^[1]. 假定人口增长的规模只依赖当前的人口规模, 就可以建立一个函数. 对于将来人口的发展情况的研究, 就可以归结到研究该函数的迭代. 特别是, 物理学或别的学科的许多现象可以被描述微分方程, 如果这个微分方程有周期解, 对该方程的研究就可以归结到观察 Poincaré 返回函数 (Poincaré return map)^[2], 最后还是与函数迭代有关.

早在 19 世纪对于函数的迭代的研究就已开始, 对于复有理函数的迭代理论的研究是由数学家 Fatou^[3] 和 Julia^[4] 在 1918~1920 年期间开始, 但由于当时工具的匮乏, 这一学科创立后却长期处于停滞状态. 19 世纪 80 年代以来, 由于高速、高性能大型计算机技术的发展, 以及一些学者在有理函数的迭代

理论^[4~6]、超越整函数和亚纯函数的迭代理论^[7,8]等方面做了大量的工作并做出了巨大贡献, 使得 19 世纪初成立的复解析动力系统的研究工作获得了新生, 受到了广泛关注, 并成为飞速发展的新领域. 人们对这一学科的兴趣激增, 不仅是因为其研究工具有了实质性的突破——能借助于先进快速的计算机和模拟手段实现历史上的许多构想, 而且还因为其研究结果涉及交叉发展的诸多学科领域, 如 Klein 群理论、拟共形映照理论、Teichmüller 空间理论、分形几何、拓扑学、复分析、计算方法、遍历性理论和符号动力学等. 另外该理论还具有非常广阔的应用价值, 比如在土壤学、经济学、统计物理、湍流理论、结构化学、人口遗传学、非线性精神物理学、神经心理学、生物形态学和地貌学等领域有重要应用. 特别值得一提的是, 动力系统、分形几何以及混沌学是

紧密相关的3个学科,这是因为复动力系统理论中的主要研究对象——Julia集,一般具有分形结构,而用于产生动力系统的映射在Julia集上呈混沌状态.这3个学科在采矿、信息处理、石油勘探及水力学中都有很大的应用价值.

本文主要研究由亚纯函数的反函数分支构成的函数族的正规性及其极限函数的性质.首先介绍一些复迭代理论中的基本术语和符号.

在本文中 $f(z):C\rightarrow\hat{C}$ 表示亚纯函数,其中 C 表示复平面, $\hat{C}=C\cup\{\infty\}$, $f^n, n\in N$,表示 $f(z)$ 的 n 次迭代,即

$$\begin{aligned} f^0(z) &= z, \\ f^1(z) &= f(z), \\ &\dots, \\ f^n(z) &= f(f^{n-1}(z)), \end{aligned}$$

对于所有自然数 $n\geq 1$,则 $f^n(z)$ 在 $\hat{C}$ 上除去函数 $f, f^2, \dots, f^{n-1}$ 极点外有定义,如果 f 是有理函数,则 f^n 在 $\hat{C}$ 上是有定义且为亚纯的, f^{-n} 表示 f^n 的反函数集.

用 $E_v(f)$ 表示 $f(z)$ 的例外值的集合,即它的反轨道

$$O^-(z) = \{w: f^n(w) = z \text{ 对于某个自然数 } n\}$$

是有限的.根据著名的Picard定理^[9],对于亚纯函数,这样的另外点至多有2点,若 $\infty \in E_v(f)$,则 $f(z)$ 是整函数,如果 α 是 $f(z)$ 单极点且为 $f(z)$ 的Picard值,则 $f(z)$ 必为如下形式

$$f(z) = \alpha + (z - \alpha)^{-k} e^{g(z)}, \quad (1)$$

其中 k 为某自然数, $g(z)$ 为整函数,因此可以将亚纯函数分为以下4大类:

(a)有理函数类(可假定至少为二阶的);

(b)超越整函数类;

(c)类型(1)的超越函数用 $\mathbf{P}$ 表示;

(d)超越亚纯函数类,其中 $\infty \notin E_v(f)$,用 $\mathbf{M}$ 表示,在有的文章中称为一般亚纯函数^[7].

定义 $E_n(f) = \{z: z \text{ 为 } f^{-n} \text{ 某一分支的奇点}\}$ 和 $B_n(f) = \{z: f^n \text{ 在 } z \text{ 点有解析}\}$,因此

$$\begin{aligned} B_0 &= \{\infty\}, \\ B_1 &= \{\infty\} \cup \{f^{-1}(\infty)\}, \\ &\dots, \\ B_j &= \{\infty\} \cup \dots \cup \{f^{-j}(\infty)\}. \end{aligned}$$

如果定义 $E(f) = \{z: \text{对于某自然数 } n, z \text{ 是 } f^{-n} \text{ 的奇点}\}$,则 $E(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(E_1(f) \setminus B_n)$.

定义1 对于 $z_0 \in C$,和 $n \geq 1$,如果 $f^n(z_0) = z_0$,则称 z_0 为 $f(z)$ 的周期点, n 称为 z_0 的周期, z_0 所有周期中最小值称为 z_0 的最小周期.

周期点在迭代理论中起着重要作用,很显然,任意阶的有理函数的周期点都是存在的,关于超越亚纯函数的周期点的存在性,Bergweiler^[7]证明如下的结果:

定理A 如果 f 是超越亚纯函数, $n \geq 2$,则 f 有无穷多个以 n 为最小周期的周期点.

定义2 亚纯函数 $f(z)$ 的Fatou集 $F(f)$ 为 $\hat{C}$ 中所有存在某个邻域使得函数序列 $\{f^n\}$ 在该邻域内是正规的点的集合, $F(f)$ 的余集 $J(f)$ 称为 $f(z)$ 的Julia集.

从Fatou集和Julia集的定义可知 $F(f)$ 是开集, $J(f)$ 是闭集.有关亚纯函数族的正规概念和正规定则的具体情况可参看文献[9],下面介绍函数组正规的基本定理:

定理B^[9] 如果解析函数族 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 上恒不取2个固定值有限复数 a 和 b ,则函数族 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 上是正规的.

定义3 $f(z)$ 是亚纯函数, U 为 $F(f)$ 的分支,则 $f^n(U)$ 一定会包含在 $F(f)$ 的某个分支内,通常记该分支为 U_n .如果对所有的自然数 $m \neq n, U_n \neq U_m$,则称 U 为游荡的,否则称为预周期的.

Baker^[10]为了研究整函数的迭代函数族的极限函数的性质,证明了:

定理C $f(z)$ 是非线性的整函数, $n_k, k=1,2, \dots$,是递增的整数序列,使得 $z = G_{n_k}(w) w \in D$ 是 $w = f^{n_k}(z)$ 的反函数 $f^{-n_k}(w)$ 的某个单值解析分支.则 $\{g_n(w): n \geq 1\}$ 在 D 上是正规族.

在本文中,将该结果进行推广,得到如下结果:

定理1 $f(z)$ 是亚纯函数(非线性的),如果函数族 $\{g_n(w): n \geq 1\}$ 中的每一个函数 $z = g_n(w) w \in D$ 是 $f(z)$ 的某次(比如说 m 次)迭代函数 $w = f^m(z)$ 的反函数 $f^{-m}(w)$ 的某个单值解析分支.则函数族 $\{g_n(w): n \geq 1\}$ 在 D 上是正规的.

例 如果 $D = C \setminus R^0$,其中 R^0 表示所有非负实数集合,所以函数族

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \ln|z| + i(\arg z + 2n\pi), \\ 0 &< \arg z < 2\pi \end{aligned}$$

在 D 上为指数函数的 $f(z) = e^z$ 的反函数的单值解析分支.由定理1得函数族在 D 上是正规的.

同时,研究该类正规族的极限函数的若干性质,得到

定理2 $f(z)$ 是亚纯函数(非线性的),如果函数族 $\{g_n(w): n \geq 1\}$ 中的每一个函数 $z = g_n(w)$ $w \in D$ 是 $f(z)$ 的某次(比如说 m 次)迭代函数 $w = f^m(z)$ 的反函数 $f^{-m}(w)$ 的某个单值解析分支. 如果 $D \cap J(f) \neq \emptyset$, 则函数族 $\{g_n(w): n \geq 1\}$ 的任意收敛子序列的极限函数 $\varphi(z)$ 都是常数,且包含在 $f(z)$ 的 Julia 集 $J(f)$ 中.

定理3 $f(z)$ 是亚纯函数,区域 D 是 $F(f)$ 的某个预周期分支子 D_1 子集,对所有自然数 n , 满足 $f^n(D_1) \cap D_1 = \emptyset$, 如果 $z = g^{n_k}(w)$ 是函数 $w = f^{n_k}(z)$ 在 D 上的反函数 $f^{-n_k}(w)$ 的某个解析分支. 则 $\{g_k^n(w)\}$ 在 D 上的所有极限函数都是常数,且属于 $J(f)$.

1 主要引理

引理1^[7] 亚纯函数的 Julia 集 $J(f)$ 要么是全复平面,要么没有内点.

引理2^[7] $f(z)$ 是亚纯函数,则 $f(z)$ 的 Fatou 集和 Julia 集是完全不变的.

在这里,集合 S 被称为完全不变,如果 $z \in S$, 则有 $f(z) \in S$ (除非 $f(z)$ 没有定义), 且对所有满足 $f(w) = z$ 的点 w 都属于集合 S .

引理3 $\{f_n(z)\}$ 为区域 D 上的解析函数族,如果 $f_n(z)$ 在区域 D 上一致收敛到非常数函数 $f(z)$, 点 $z = a$ 是 $f(z)$ 在 D 内的零点. 则对任意的 $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, 存在自然数 N_ε , 使得对所有的 $n > N_\varepsilon$, $f_n(z)$ 在圆盘 $|z - a| < \varepsilon$ 内有与 $f(z)$ 同样多的零点.

引理4 $f(z)$ 是亚纯函数,假设 L 是紧的,且 L 不包含 $E_v(f)$ 中任何点,如果 V 是点 $z_0 \in J(f)$ 的一个开邻域,则存在一个自然数 M , 使得

$$f^n(V) \supset L, \text{ 对所有 } n \geq M.$$

如果 f 是整函数 Fatou^[3] 已给出证明,对于 f 是有理函数或 $f \in \mathbf{P}$, Beardon^[5] 已给出证明.

引理5 $f(z)$ 是亚纯函数, H 是一个紧集且对任意点 $a \notin J(f)$, 任意序列 $\{f^n(a)\}$ 的极限点都不在 H 内, 则当 n 为足够大时, 集合 $f^{-n}(H) = \{z | f^n(z) \in H\}$ 满足 $f^{-n}(H) \cap K = \emptyset$, 其中 K 为包含在 $F(f)$ 内的任意紧集.

证明 假定引理5是错误的, 则存在一个紧集 $K \subset F(f)$ 和一个足够大的自然数 n 及点 $z_n \in K$, 使得 $f^n(z_n) = w_a \in H$. 由于集合 K 和 H 都是紧的, 能够取

到 $\{z_n\}$ 的子序列 $\{z_{n_k}\}$ 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时, $z_{n_k} \rightarrow z_0 \in K$, 且 $w_{n_k} \rightarrow w_0 \in H$.

由于 $K \subset F(f)$, 易证 K 被 $F(f)$ 的有限个分支的并所包含, 且集合 K 与 $F(f)$ 的分支的交集仍是紧的, 不失一般性, 假设 $\{f^{n_k}(z)\}$ 在 K 上是一致收敛的, 所以, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $f^{n_k}(z_0) \rightarrow w_0$, 矛盾.

2 定理1的证明

根据定理A, 存在 α 和 β 为 $f(z)$ 的2个不同周期点, 分别以 $p, q (\geq 3)$ 为最小正周期. $f^n(\alpha)$ 的值就构成一个循环链:

$$A: \alpha_0 = \alpha, \alpha_1 = f(\alpha), \alpha_2 = f(\alpha_1), \dots, \\ \alpha_p = f(\alpha_{p-1}) = \alpha_0,$$

同样, $f^n(\beta)$ 的值也构成一个循环链:

$$B: \beta_0 = \beta, \beta_1 = f(\beta), \beta_2 = f(\beta_1), \dots, \\ \beta_q = f(\beta_{q-1}) = \beta_0.$$

因此, 在区域 $D \setminus A$ 中, 对所有自然数 n , $g_n(w)$ 不取 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 如不然, 存在 $w_0 \in D \setminus A$, 使得 $g_m(w_0) = \alpha_j, j \in \{1, 2, 3\}$, 所以 $w_0 = f^m(\alpha_j) \in A$, 矛盾. 由定理B, 解析函数族 $\{g_n(w): n \geq 1\}$ 在区域 $D \setminus A$ 上是正规的, 同理, 函数族 $\{g_n(w): n \geq 1\}$ 在区域 $D \setminus B$ 上也是正规的, 由于 A 和 B 是2个不相交的集合, 因此, 函数族 $\{g_n(w): n \geq 1\}$ 在 D 上是正规的.

3 定理2的证明

对于每一个 n , 假定 $g_n(w)$ 为 $f^{-m(n)}(w)$ 的单值解析分支, 且假定在区域 D 上

$$g_{n_k}(w) \xrightarrow{\text{局部一致}} \varphi(w), \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}$$

先假设 $\varphi(z)$ 不是常数, 然后寻找矛盾.

$g_n(w)$ 为 $f^{-m(n)}(w)$ 在 D 上的一个单值解析分支, $g_n(w)$ 在 D 上是单叶函数, 又由于 $\varphi(z)$ 是非常数函数, 根据引理3, $\varphi(z)$ 在 D 上是单叶函数. 令 D_0 为包含在 D 内的闭圆盘, 且 $D_0 \cap J(f) \neq \emptyset$, 因此, 在闭圆盘 D_0 上

$$g_{n_k}(w) \xrightarrow{\text{一致}} \varphi(w), \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}$$

在 $D_0 \cap J(f)$ 中任取 w_0, γ 为 D_0 中以 w_0 为中心的某个圆盘的边界. 由于在 γ 上 $g_{n_k}(w)$ 是一致收敛到非常数函数 $\varphi(z)$, 根据幅角原理, 对所有足够大 n_k , $g_{n_k}(D_0)$ 包含了 $\varphi(w_0)$ 的某个邻域 U . 由引理2, $J(f)$ 是完全不变的, 所以对所有的自然数 n

$$f^n(w_0) \in J(f).$$

又因为 $J(f)$ 是闭集,且满足

$$g_{n_k}(w_0) \rightarrow \varphi(w_0), \text{ 当 } k \rightarrow \infty \text{ 时}$$

$\varphi(w_0) \in J(f)$. 因此对所有足够大的自然数 n_k , 可得

$$f^{m(n_k)}(U) \subset f^{m(n_k)}(g_{n_k}(D_0)) = D_0,$$

这与引理4相矛盾.

4 定理3的证明

根据定理1, 可得 $\{g^{n_k}(w)\}$ 在 D 上是正规的. 令 $\varphi(z)$ 为函数序列 $\{g^{n_k}(w)\}$ 的某个收敛子序列的极限函数 ($\neq \infty$).

假定存在一点 $a \in F(f)$, 使得区域 D 包含序列 $\{f^{m_i}(a)\}$ 的某个极限 b , 即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{m_i}(a) = b, \text{ 且 } b \in D.$$

因此, 对任意足够大的自然数 M , 总存在自然数 $m_p > M$, 使得 $f^{m_p}(a) \in D$. 由于对所有的自然数 n , 有

$$f^{m_p+n}(a) \in f^n(D_1),$$

又因为

$$D \cap f^n(D_1) \subset D_1 \cap f^n(D_1) = \phi,$$

矛盾. 因此, 区域 D 不包含序列 $\{f^n(a)\}$ 的任意极限点, 其中 $a \in F(f)$.

由引理5, 可证得 $\varphi(D) \cap F(f) = \phi$, 即 $\varphi(D) \subset J(f)$. 由于 $F(f)$ 是非空 ($D_1 \subset F(f)$), 所以 $J(f)$ 不可能是全复平面. 由引理1得知 $J(f)$ 没有内点, 函数 $z = \varphi(w)$ 只能是常数, 且属于 $J(f)$.

参考文献:

- [1] MAY R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. Nature, 1976, 261: 459-467.
- [2] RUELLE D. Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory[M]. Boston: Academic Press, 1989. 19-43.
- [3] FATOU P. Sur l'iteration des fonctions transcendentes entieres[J]. Acta Math, 1926, 47: 337-360.
- [4] JULIA G. Memoire sur l'iteration des fraction rationnelles[J]. J Math Pures Appl, 1918, 8: 47-245.
- [5] BEARDON A. Iteration of rational functions[M]. New York-Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1991. 1-279.
- [6] STEIMMETZ N. Rational iteration[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993. 1-188.
- [7] BERGWEILER W. Iterations of meromorphic functions[J]. Bull Amer Math Soc, 1993, 29: 151-188.
- [8] HUA X H, YANG C C. Dynamics of transcendental functions[M]. Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. 1-154.
- [9] SCHIFF J L. Normal families[M]. New York: Springer-Verlag, 1993. 1-236.
- [10] BAKER I N. Limit functions and sets of non-normality in iteration theory[J]. Ann Sci Fenn Ser A I Math, 1970, 467: 3-11.

【责任编辑 李晓卉】