

关于 $f+a(f')^n$ 的值分布

雷春林, 王雪琴

(华南农业大学理学院, 广东 广州 510642)

摘要: 设 $f(z)$ 为超越亚纯函数, $a(\neq 0)$ 为有穷复数, $n(\geq 2)$ 为正整数. 若 $f(z)$ 没有单重极点, 则 $f+a(f')^n$ 取每个有穷复数无穷多次.

关键词: 整函数; 亚纯函数; 值分布

中图分类号: O174.52 文献标识码: A 文章编号: 1001-411X(2006)03-0111-02

The Value Distribution of $f+a(f')^n$

LEI Chun-lin, WANG Xue-qin

(College of Sciences, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China)

Abstract: Let f be a transcendental meromorphic function, all of whose poles have multiplicity at least 2, let a be a nonzero finite complex number, and let $n \geq 2$ be a positive integer, then $f+a(f')^n$ assumes every finite complex number infinitely often.

Key words: entire function; meromorphic function; value distribution

设 $f(z)$ 为复平面上的一个亚纯函数. 本文将用下列值分布的记号

$T(r, f), m(r, f), N(r, f), \bar{N}(r, f), \dots$

这里 $S(r, f) = o(T(r, f))$, 至多除去一个线性测度为有穷的集合.

1959年, Hayman^[1]证明了

定理 A 设 $f(z)$ 为超越亚纯(整)函数, $a(\neq 0)$ 为有穷复数, $n \geq 5$ (≥ 3) 为正整数. 则 $f' + af^n$ 取每个有穷复数无穷多次.

1979年, Mues^[2]举反例说明: 当 $f(z)$ 为超越亚纯函数且 $n=3, 4$ 时, 定理 A 不成立.

1991年, YE Ya-sheng^[3]研究了一个与定理 A 类似的问题, 证明了

定理 B 设 $f(z)$ 为超越亚纯(整)函数, $a(\neq 0)$ 为有穷复数, $n \geq 3$ (≥ 2) 为正整数. 则 $f+a(f')^n$ 取每个有穷复数无穷多次.

在文献[3]中, YE Ya-sheng 提出: 当 $f(z)$ 为亚纯函数且 $n=2$ 时, 定理 B 是否成立? 本文部分地解决了这个问题.

定理 设 $f(z)$ 为超越亚纯函数, $a(\neq 0)$ 为有穷复数, $n(\geq 2)$ 为正整数. 若 $f(z)$ 没有单重极点, 则 $f+a(f')^n$

取每个有穷复数无穷多次.

1 主要引理

为了证明本文的结论, 需要下列引理:

引理 1^[4] 若 $f(z)$ 为超越亚纯函数, 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty.$$

引理 2^[5] 若 $f(z)$ 为超越亚纯函数, 且 k 为正整数, 则

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f^{(k)}).$$

引理 3 若 $f(z)$ 为超越亚纯函数, 则

$$T(r, f') \leq T(r, f) + \bar{N}(r, f) + S(r, f').$$

证明: 由 Nevanlinna 理论和引理 2, 可得

$$\begin{aligned} T(r, f') &= N(r, f') + m(r, f') \leq \\ N(r, f) + \bar{N}(r, f) + m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) &\leq \\ T(r, f) + \bar{N}(r, f) + S(r, f'). \end{aligned}$$

2 定理的证明

设

$$g = f + a(f')^n - b, \varphi = \frac{g'}{g}, \quad (1)$$

断言 $\varphi \neq 0$. 否则, 若 $\varphi \equiv 0$, 则有

$$f'[1 + na(f')^{n-2}f''] \equiv 0,$$

故 $f' \equiv 0$ 或 $1 + na(f')^{n-2}f'' \equiv 0$. 那么 $f(z)$ 为常数或一个二次多项式, 矛盾. 所以 $\varphi \neq 0$.

由 Nevalinna 理论和式(1), 则有 $T(r, g') \leq O(T(r, f'))$. 由引理 2 得

$$m(r, \varphi) = S(r, f'). \quad (2)$$

由式(1)得

$$f'[1 + na(f')^{n-2}f''] = \varphi[f + a(f')^n - b]. \quad (3)$$

由式(3)和 Nevalinna 第一基本定理得

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{(f')^{n-2}f'' + \frac{1}{na}}\right) &\leq \\ N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) &\leq \\ N(r, \varphi) + N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f') &\leq \\ \bar{N}(r, f) + 2N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f'). \end{aligned} \quad (4)$$

由式(3)整理得

$$a(f')^n \left(\frac{nf''}{f'} - \varphi \right) = \varphi(f - b) - f', \quad (5)$$

令 $\psi = \frac{nf''}{f'} - \varphi$. 断言 $\psi \neq 0$. 否则, 若 $\psi \equiv 0$, 则有 $g - (f')^n \equiv C$, 这里 C 为常数, 即 $f + (a - 1)(f')^n = C + b$, 求导得

$$f'[1 + n(a - 1)(f')^{n-2}f''] \equiv 0,$$

则 $f' \equiv 0$ 或 $1 + n(a - 1)(f')^{n-2}f'' \equiv 0$. 那么 $f(z)$ 为常数或一个二次多项式, 矛盾. 所以 $\psi \neq 0$.

由式(5)得

$$a(f')^n \psi = \varphi(f - b) - f'. \quad (6)$$

对式(6)求导得

$$na(f')^{n-1}f''\psi + a(f')^n\psi' = \varphi'(f - b) + \varphi f' - f''. \quad (7)$$

由式(6)和式(7)消去 f 得

$$a(f')^n \left(\psi' \varphi + \frac{nf''}{f'} \psi \varphi - \varphi' \psi \right) = \varphi' f' + \varphi^2 f' - \varphi f'', \quad (8)$$

令 $P = \psi' \varphi + \frac{nf''}{f'} \psi \varphi - \varphi' \psi$, $Q = \varphi' f' + \varphi^2 f' - \varphi f''$. 则式(8)可记为 $a(f')^n P = Q$, 且由 Nevalinna 理论和引理 2 得

$$m(r, P) = S(r, f'), \quad (9)$$

$$N(r, P) \leq 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + 3N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right), \quad (10)$$

$$m(r, Q) \leq m(r, f') + S(r, f'). \quad (11)$$

由式(9)、(10)、(11)和(4)得

$$nm(r, f') \leq m\left(r, \frac{Q}{P}\right) \leq$$

$$m(r, f') + T(r, P) + O(1) + S(r, f') \leq$$

$$\begin{aligned} m(r, f') + 2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f'}\right) + 3N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f') &\leq \\ m(r, f') + 2\bar{N}(r, f) + 7N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f'). \end{aligned} \quad (12)$$

由式(6)得

$$nN(r, f') = N\left(r, \frac{\varphi(f - b) - f'}{\psi}\right) \leq$$

$$N(r, \varphi(f - b) - f') + N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) \leq$$

$$N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + T(r, \psi) + O(1) \leq$$

$$N(r, f') + \bar{N}(r, f) + 2N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \leq$$

$$N(r, f') + 2\bar{N}(r, f) + 4N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f') \leq$$

$$\frac{5}{3}N(r, f') + 4N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f').$$

所以

$$N(r, f') \leq 12N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f'). \quad (13)$$

由式(12)和(13)得

$$\begin{aligned} m(r, f') &\leq \frac{2}{3}N(r, f') + 7N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f') \leq \\ 15N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f'). \end{aligned} \quad (14)$$

由式(13)和(14)得 $T(r, f') \leq 27N\left(r, \frac{1}{f + a(f')^n - b}\right) + S(r, f')$, 所以 $f + a(f')^n - b$ 有无穷多个零点.

致谢: 感谢华南农业大学理学院方明亮教授和鼓励和帮助!

参考文献:

- [1] HAYMAN W K. Picard value of meromorphic functions and their derivatives[J]. Annals of Mathematics, 1959, 70:9-42.
- [2] MUES E. Uber ein problem von hayrdan[J]. Math Z, 1979, 164:239-259.
- [3] YE Ya-sheng. A picard type theorem and bloch law[J]. Chinese Ann of Math, 1994, 15B(1):75-80.
- [4] YANG Le. Value distribution theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993:77-79.
- [5] YANG Le. Precise fundamental inequalities and sum of deficiencies[J]. Sci China: Ser A, 1991, 34(2):157-165.

【责任编辑 李晓卉】