

多圆盘上混合范数空间上的一类积分算子

钟巧红¹, 张国权²

(1 嘉应学院 数学系, 广东 梅州 514015; 2 华南农业大学 理学院, 广东 广州 510642)

摘要: 将 Kuren 等人在多元单位开球算子方面结果进行推广, 得到了多圆盘上混合范数空间上一类积分算子有界的充分必要条件.

关键词: 混合范数空间; 积分算子; 多圆盘

中图分类号: O174.56

文献标识码: A

文章编号: 1001-411X(2007)01-0114-03

A Class of Integral Operators on Mixed Norm Spaces on the Polydisk

ZHONG Qiao-hong¹, ZHANG Guo-quan²

(1 Dept. of Mathematics, Jiaying University, Meizhou 514015, China;

2 College of Sciences, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China)

Abstract: Some sufficient and necessary conditions for the boundedness of a class of integral operators on mixed norm spaces on the polydisk are obtained.

Key words: mixed norm space; integral operators; polydisk

用 B 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球, dv 表示 B 上规范化的 Lebesgue 测度, 即 $v(B) = 1$. $\mu_\alpha (\alpha > -1)$ 为加权的 Lebesgue 测度, 其中 $d\mu_\alpha = c_\alpha (1 - |z|^2)^\alpha dv(z)$, c_α 是规范化的常数, 满足 $\mu_\alpha(B) = 1$. 如果 $\alpha > -1$, 用 $L^p(B, dv_\alpha) (0 < p < \infty)$ 表示 B 上满足如下条件的可测函数空间

$$\int_B |f(z)|^p dv_\alpha(z) =$$

$$c_\alpha \int_B |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dv(z) < \infty.$$

Kuren 等^[1] 引进了积分算子 $T = T_{a,b,c}$ 与 $S = S_{a,b,c}$, 其定义为

$$Tf(z) = T_{a,b,c} f(z) =$$

$$(1 - |z|^2)^\alpha \int_B \frac{(1 - |\omega|^2)^b}{(1 - \langle z, \omega \rangle)^c} f(\omega) dv(\omega),$$

$$Sf(z) = S_{a,b,c} f(z) =$$

$$(1 - |z|^2)^\alpha \int_B \frac{(1 - |\omega|^2)^b}{|1 - \langle z, \omega \rangle|^c} f(\omega) dv(\omega).$$

其中 a, b 与 c 是实参数. 当 $a = 0$ 且 $c = n + 1 + b$ 时,

Forelli 等^[2] 得到了 $T_{0,b,n+1+b}$ 在 $L^p(B)$ 上有界的充分与必要条件. 算子 $T_{0,b,n+1+b}$ 在其他函数空间上的有界性研究可参见文献[3-7]. Kuren 等^[1] 得到了算子 $T = T_{a,b,c}$ 与 $S = S_{a,b,c}$ 在 $L^p(B, dv_\alpha)$ 上有界的充分必要条件.

本文将考虑多圆盘上的类似积分算子. 首先, 引进一些记号. 用 D^n 表示 $\mathbb{C}^n$ 中多圆盘, T^n 表示 D^n 的特异边界, $H(D^n)$ 表示 D^n 上全纯函数空间. 记

$$M_p(f, r) = \|f(r)\|_{L^p(T^n, dm_n)},$$

$$r = (r_1, \dots, r_n) \in I^n, 0 < p \leq \infty$$

其中 $I_n = [0, 1]^n$, $f \in H(D^n)$, dm_n 是 T^n 上的规范化 n 维 Lebesgue 测度, 满足 $m_n(T^n) = 1$. 多圆盘上的混合范数空间 $L(p, q, \alpha)$ 指的是满足

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \left[\int_{I_n} \prod_{j=1}^n (1 - r_j)^{\alpha_j-1} M_p^q(f, r) \prod_{j=1}^n dr_j \right]^{1/q} < \infty, \\ 0 < q < \infty,$$

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \text{ess sup}_{r \in I_n} \prod_{j=1}^n (1 - r_j)^{\alpha_j} M_p(f, r) < \infty, q = \infty$$

的所有可测函数构成的空间, 其中 $p, q > 0, \alpha = (\alpha_1,$

收稿日期: 2006-05-09

作者简介: 钟巧红 (1967—), 女, 高级讲师, E-mail: zgqihg@163.com; 通讯作者: 张国权 (1949—), 男, 教授, E-mail: zhanggq@scau.edu.cn

$\dots, \alpha_n$). 记

$$P_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1) \left[\operatorname{Re} \frac{2}{(1-z)^{\alpha+1}} - 1 \right], z \in D, \alpha \geq 0.$$

$$Q_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1) \operatorname{Im} \frac{2}{(1-z)^{\alpha+1}}, z \in D, \alpha \geq 0.$$

易知 $P_0(z) = P(z)$ 是 Poisson 核, $Q_0(z) = Q(z)$ 是共轭的 Poisson 核. 又记

$$P_\alpha(z, \zeta) = P_\alpha(z\bar{\zeta}), Q_\alpha(z, \zeta) = Q_\alpha(z, \bar{\zeta}), z, \zeta \in D.$$

设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0, z, \zeta \in D^n$, 定义

$$P_\alpha(z, \zeta) = \prod_{i=1}^n P_{\alpha_i}(z_i, \zeta_i), Q_\alpha(z, \zeta) = \prod_{i=1}^n Q_{\alpha_i}(z_i, \zeta_i).$$

现在, 引进一类新的积分算子 $T_{a,b,c}$ 和 $S_{a,b,c}$,

$$T_{a,b,c}(f)(z) =$$

$$(1-|z|^2)^a \int_{D^n} (1-|\zeta|^2)^b P_c(z, \zeta) f(\zeta) dm_{2n}(\zeta), \quad (1)$$

$$S_{a,b,c}(f)(z) =$$

$$(1-|z|^2)^a \int_{D^n} (1-|\zeta|^2)^b |P_c(z, \zeta)| |f(\zeta)| dm_{2n}(\zeta), \quad (2)$$

其中 $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$, $a_i, b_i, c_i, i = 1, \dots, n$ 是实参数. 本文的主要结论是如下定理:

定理 设 $1 \leq p, q < \infty$, 则下列条件等价:

(a) $T_{a,b,c}$ 在 $L(p, q, \alpha)$ 上有界;

(b) $S_{a,b,c}$ 在 $L(p, q, \alpha)$ 上有界;

(c) $b_i + 1 > \alpha_i > -\alpha_i$ 且

$$\alpha_i + a_i + b_i + 1 \geq c_i > \alpha_i + a_i, i = 1, \dots, n.$$

在本文中, C 代表常数, 并且不同的地方可以不同, p' 表示 p 的共轭, 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1 几个引理

在这一节中, 将给出主要结论的证明, 为此先给出几个引理.

引理 1^[8]. 设 $\alpha_i \geq 0, \frac{1}{1+\alpha_i} < p \leq \infty (1 \leq i \leq n)$.

则

$$|P(z, \zeta)| \leq C(\alpha, n) \prod_{i=1}^n \frac{1}{|1 - \bar{\zeta}_i z_i|^{\alpha_i+1}},$$

$$|Q(z, \zeta)| \leq C(\alpha, n) \prod_{i=1}^n \frac{1}{|1 - \bar{\zeta}_i z_i|^{\alpha_i+1}}, z, \zeta \in D^n,$$

$$M_p(f, r) \leq C(\alpha, n, p) \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1-r_i)^{\alpha_i+1-1/p}}, r \in I^n.$$

引理 2^[8]. 如果 $g(t) \geq 0, t \in I^n, 1 \leq q < \infty, \beta_i < -1 < \alpha_i (1 \leq i \leq n)$, 则

$$\int_{I^n} (1-r)^\alpha \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 g(t) dt \right)^q dr \leq$$

$$C \int_{I^n} (1-r)^{\alpha+q} g^q(r) dr.$$

$$\int_{I^n} x^\beta \left(\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} g(t) dt \right)^q dx \leq C \int_{I^n} x^{\beta+q} g^q(x) dx.$$

其中 C 仅依赖于 α, β, q, n .

2 定理证明

将按照 $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c)$ 的次序证明.

假设 $b_i + 1 > \alpha_i > -\alpha_i, \alpha_i + a_i + b_i + 1 \geq c_i > \alpha_i + a_i, i = 1, \dots, n$.

设 $f(z) \in L(p, q, \alpha), 1 \leq q < \infty$. 由 Minkowski 不等式及引理 1 有

$$M_p(S_{a,b,c}f, r) \leq$$

$$(1-r^2)^a \int_{D^n} (1-|\zeta|^2)^b |P_c(r, \zeta)| M_p(f; \rho) dm_{2n}(\zeta) \leq$$

$$C(1-r)^a \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 + \int_{r_1}^1 \dots \int_{r_n}^1 \right) M_p(f, \rho) \frac{(1-\rho)^b}{(1-r\rho)^c} d\rho.$$

利用三角不等式及引理 2 可得

$$\|S_{a,b,c}f\|_{p,q,\alpha} =$$

$$\left\| (1-r)^\alpha M_p(S_{a,b,c}f; r) \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \leq$$

$$C \left\| (1-r)^{\alpha+a} \int_0^1 \dots \int_0^1 M_p(f; \rho) \frac{d\rho}{(1-\rho)^{c-b}} \right\|_{L^q(dr/(1-r))} +$$

$$C \left\| (1-r)^{\alpha+a-c} \int_{r_1}^1 \dots \int_{r_n}^1 (1-\rho)^b M_p(f; \rho) d\rho \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \leq$$

$$C \left[\int_{I^n} (1-r)^{(\alpha+a)q-1} \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{M_p(f; \rho)}{(1-\rho)^{c-b}} d\rho \right)^q dr \right]^{1/q} +$$

$$C \left[\int_{I^n} (1-r)^{q(\alpha+a-c)-1} \left(\int_{r_1}^1 \dots \int_{r_n}^1 (1-\rho)^b M_p(f; \rho) d\rho \right)^q dr \right]^{1/q} \leq$$

$$C \left[\int_{I^n} (1-r)^{(\alpha+a)q-1} \left(\frac{1-r}{(1-r)^{c-b}} M_p(f; r) \right)^q dr \right]^{1/q} +$$

$$C \left[\int_{I^n} x^{q(\alpha+a-c)-1} \left(\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \eta^b M_p(f; 1-\eta) d\eta \right)^q dx \right]^{1/q} \leq$$

$$C \left[\int_{I^n} (1-r)^{(\alpha+a)q-1+q(1-c+b)} M_p^q(f; r) dr \right]^{1/q} +$$

$$C \left[\int_{I^n} x^{q(\alpha+a-c)-1+q+q^b} M_p^q(f; 1-x) dx \right]^{1/q} \leq$$

$$C \|f\|_{p,q,\alpha},$$

从而 $S_{a,b,c}$ 在 $L(p, q, \alpha)$ 上是有界的.

$(b) \Rightarrow (a)$ 是显然的. 下面证明 $(a) \Rightarrow (c)$. 假设 $T_{a,b,c}$ 在 $L(p, q, \alpha)$ 上有界, 即对任意的 $f \in L(p, q, \alpha)$,

$$\|T_{a,b,c}\|_{p,q,\alpha} \leq C \|f\|_{p,q,\alpha},$$

其中常数 C 不依赖于 f . 选取多重指标 $N = (N_1, \dots, N_n)$, 要求 N_j 足够大, 使得

$$f_N(z) = (1-|z|^2)^N \in L(p, q, \alpha),$$

易知存在常数 $C(a, b, c, N)$ 满足 $T_{a,b,c}(f_N)(z) = C(a, b, c, N)(1 - |z|^2)^\alpha$. 因此对所有的 $i \in [1, n]$, 成立

$$+\infty > \|T_{a,b,c}(f_N)\|_{p,q,\alpha}^q \leq C(a, b, c, q, N, n) \int_{\mathbb{D}^n} (1-r)^{(\alpha+a)q-1} dr,$$

从而不等式 $\alpha_i > -a_i$ 成立. 用 $T_{a,b,c}^*$ 表示 $T_{a,b,c}$ 的伴随算子. 易知

$$T_{a,b,c}^*(f)(z) = (1-|z|^2)^{b+1-\alpha} \int_{\mathbb{D}^n} (1-|\xi|^2)^{a+\alpha q-1} P_c(z, \xi) f(\xi) dm_{2n}(\xi).$$

由文献[9], $L(p, q, \alpha)$ 的对偶空间可视为 $L(p', q', \alpha q/q')$. 从而由 $T_{a,b,c}$ 在 $L(p, q, \alpha)$ 上有界可知, $T_{a,b,c}^*$ 在 $L(p', q', \alpha q/q')$ 上有界, 即对任意的 $f \in L(p', q', \alpha q/q')$, 成立

$$\|T_{a,b,c}^* f\|_{p', q', \alpha q/q'} \leq C \|f\|_{p', q', \alpha q/q'}. \quad (3)$$

如果 $1 < q < \infty$, 选取多重指标 $N = (N_1, \dots, N_n)$, 要求 N_j 足够大, 使得 $f_N(z) = (1 - |z|^2)^N \in L(p', q', \alpha q/q')$, 从而 $T_{a,b,c}^*(f_N)(z) = C(1 - |z|^2)^{b+1-\alpha}$. 因此

$$+\infty > \|T_{a,b,c}^*(f_N)\|_{p', q', \alpha q/q'}^{q'} \geq C \int_{\mathbb{D}^n} (1-r)^{q'(b+1-\alpha)+\alpha q-1} dr,$$

其中常数 C 仅依赖于 α, a, b, q, N, n . 上面的不等式表明 $q'(b_i + 1 - \alpha_i) + a_i q > 0$, 而这等价于

$$b_i + 1 > \alpha_i, 1 \leq i \leq n.$$

如果 $q = 1$, 由不等式(3)可知

$$\|T_{a,b,c}^*(f_N)\|_{p', \infty, 0} \leq C \|f\|_{p', \infty, 0}, \forall f \in L(p', \infty, 0). \quad (4)$$

用 $T_{a,b,c}^*$ 作用 $f_N(z)$ 可得

$$+\infty > \|T_{a,b,c}^*(f_N)\|_{p', \infty, 0} = C \sup_{r \in \mathbb{D}^n} (1-r^2)^{b+1-\alpha}.$$

从而对所有的 $1 \leq i \leq n$, 有 $b_i + 1 \geq \alpha_i$.

如果能证明 $b_i + 1 = \alpha_i$ 对所有的指标 i 都不可能成立, 则完成了定理的证明. 不失一般性假设 $b_1 + 1 = \alpha_1$. 则对给定的 $s \in D^n$, 考虑函数

$$g_s(z) = |P_{a+b+1}(s, z)| / P_{a+b+1}(s, z), z \in D^n,$$

易知 $|g_s(z)| \equiv 1$ 并且对每个 $s \in D^n$, 有 $|g_s(z)| \in L(p', \infty, 0)$. 从而 $T_{a,b,c}^*(g_s) \in L(p', \infty, 0)$. 令 $z = s$, 有

$$T_{a,b,c}^*(g_s)(z) =$$

$$C \prod_{j=2}^n (1 - |z_j|^2)^{b_j+1-\alpha_j}$$

$$\prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{D}} (1 - |\xi_j|^2)^{a_j+\alpha_j-1} |P_{a_j+b_j+1}(z_j, \xi_j)| dm_2(\xi_j).$$

注意到 $h(1, 1, \alpha)$ 中调和共轭的有界性^[10], 有

$$T_{a,b,c}^*(g_s)(z) \geq C \log \frac{1}{1 - |z_1|},$$

让 $|z_1| \rightarrow 1$, 将得到一个矛盾. 因此 $b_j + 1 = \alpha_j$ 对任何指标 j 都不成立. 从而完成定理的证明.

参考文献:

- [1] KURENS O, ZHU Ke-he, A class of integral operators on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ [J]. Integral Equation and Operator Theory, 2006(56):71-82.
- [2] FORELLI F, RUDIN W. Projections on spaces of holomorphic functions on Balls [J]. Indiana Univ Math J, 1974, 24:593-602.
- [3] KOLASKI C. A new look at a theorem of Forelli and Rudin [J]. Indiana Univ Math J, 1979, 28:495-499.
- [4] CHOE B R. The weighted Bergman spaces and the Bloch spaces [J]. Proc Amer Math Soc, 1990, 108(1):127-136.
- [5] ZHU Ke-he, The Bergman spaces, the Bloch spaces and Gleason's problem [J]. Trans Amer Math Soc, 1988, 309:253-268.
- [6] REN Guang-bin, SHI Ji-hua. Bergman type operator on mixed norm spaces with applications [J]. Chin Ann of Math, 1997, 3(18B):265-276.
- [7] LIU Yu-ming. Boundedness of the Berman type operators on mixed norm space [J]. Proc Amer Math Soc, 2002, 130(8):2363-2367.
- [8] AVETISYAN K L. Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc [J]. J Math Anal Appl, 2004, 291(2):727-740.
- [9] BENEDEK A, PANZONE R. The space L^p with mixed norm [J]. Duke Math J, 1961, 28:301-324.
- [10] DJRBASHIAN A E, SHAMOYAN F A. Topics in the Theory of A_α^p spaces [M]. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1988:1-100.

【责任编辑 李晓卉】