全纯函数族的一些正规定则

雷春林，方明亮，王雪琴
（华南农业大学 理学院，广东 广州 510642）

摘要：设$\mathscr{F}$为区域D内的一族全纯函数，k为正整数，$n_0,\cdots,n_k$为k个非负整数，满足$n_0+\cdots+n_k\geqslant 2$，且存在$n_i\geqslant 1$ $(0\leqslant i\leqslant k-1)$. 若对任意$f(z)\in\mathscr{F}$，$f(z)$的零点重数$\geqslant k$，且$f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}\neq 1$，则$\mathscr{F}$在$D$内正规.

关键词：全纯函数；正规族；Zalcman引理
中图分类号：O174.52　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-411X(2008)04-0113-04

Some Normality Criteria for Families of Holomorphic Functions

LEI Chun-lin, FANG Ming-liang, WANG Xue-qin
(College of Sciences, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: Let $\mathscr{F}$ be a family of holomorphic functions in a domain D, and $n_0,\cdots,n_k$ be k non-negative integers with $n_0+\cdots+n_k\geqslant 2$ and with some $n_i\geqslant 1(0\leqslant i\leqslant k-1)$. If for every function $f(z)\in\mathscr{F}$, the zeros of $f(z)$ have multiplicities at least k, and $f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}\neq 1$, then $\mathscr{F}$ is normal in D.

Key words: holomorphic function; normal family; Zalcman' lemma.

1959年，Hayman[1]提出了下述猜想

设$\mathscr{F}$为区域D内的一族全纯函数，若对任意$f(z)\in\mathscr{F}$，$f^n(z)f'(z)\neq 1$，则$\mathscr{F}$在D内正规.

杨乐和张广厚[2]及Oshkin[3]证明了上述猜测. 方明亮等[4]、Pang等[5]则考虑了用$f^{(k)}$替换f'的情形，他们证明了

定理A　设$\mathscr{F}$为区域D内的一族全纯函数，k为正整数. 若对任意$f(z)\in\mathscr{F}$，$f(z)$的零点重数$\geqslant k$，且$f^{(k)}(z)f^n(z)\neq 1$，则$\mathscr{F}$在D内正规.

本文推广了定理A，证明了

定理1　设$\mathscr{F}$为区域D内的一族全纯函数，k为正整数，n_0、$\cdots$、n_k为k个非负整数，满足$n_0+\cdots+n_k\geqslant 2$，且存在$n_i\geqslant 1(0\leqslant i\leqslant k-1)$. 若对任意$f(z)\in\mathscr{F}$，$f(z)$的零点重数$\geqslant k$，且$f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}\neq 1$，则$\mathscr{F}$在$D$内正规.

例1　设$\mathscr{F}=\{nz^k\}$，区域D单位圆$\triangle$，对任意$f(z)\in\mathscr{F}$，$f(z)$的零点重数为k，且$(f^{(k)})^2\neq 1$，但$\mathscr{F}$在$\triangle$上不正规. 所以条件"存在$n_i\geqslant 1(0\leqslant i\leqslant k-1)$"是必要的.

顾永兴[6]证明了

定理B　设$\mathscr{F}$为区域D内的一族全纯函数，k、m为正整数，若对任意$f(z)\in\mathscr{F}$，$f(z)\neq 0$，且$f^{(k)}(z)-1$的零点至多m个，则$\mathscr{F}$在D内正规.

本文推广了定理B，证明了

定理2　设$\mathscr{F}$为区域D内的一族全纯函数，k、m为正整数，n_0、$\cdots$、n_k为k个非负整数，满足$n_0+\cdots+n_k\geqslant 2$，且存在$n_i\geqslant 1(0\leqslant i\leqslant k-1)$. 若对任意$f(z)\in\mathscr{F}$，$f(z)\neq 0$且$f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}-1$的单重零点至多$m$个，则$\mathscr{F}$在$D$内正规.

注：例1说明定理2中条件"$f(z)\neq 0$"换为"$f(z)$的零点重数$\geqslant p$，p为正整数"则定理不成立.

1965年杨乐和张广厚[2]证明了

定理C　设$\mathscr{F}$为区域D内的一族全纯函数，k、m、n为正整数. 若对任意$f(z)\in\mathscr{F}$，$f(z)$的零点重数$\geqslant m$，$f^{(k)}(z)-1$的零点重数$\geqslant n$，且$\dfrac{1}{n}+\dfrac{k+1}{m}<1$，则$\mathscr{F}$在$D$内正规.

本文推广了定理C，证明了

收稿日期：2007-09-05
作者简介：雷春林（1976—），男，硕士，E-mail：leichunlin0113@126.com
基金项目：国家自然科学基金（10741065）；华南农业大学校长基金（4900-K07278）

定理3 设$\mathscr{F}$为区域D内的一族全纯函数,k、m、n为正整数,n_0、…、n_k为k个非负整数,满足$n_0+\cdots+n_k\geqslant 2$,且存在$n_i\geqslant 1(0\leqslant i\leqslant k-1)$. 若对任意$f(z)\in\mathscr{F}$,$f(z)$的零点重数$\geqslant m$,$f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}-1$的零点重数$\geqslant n$,且$\frac{1}{n}+\frac{k+1}{m}<1$,则$\mathscr{F}$在$D$内正规.

1 主要引理

引理1 设$\mathscr{F}$为单位圆△内的一族全纯函数,对任意$f(z)\in\mathscr{F}$,$f(z)$的零点重数$\geqslant k$,k为正整数,若$\mathscr{F}$在△内不正规,则对任意$-1\leqslant\alpha<k$,存在

① 一个实数r,$0\leqslant r\leqslant 1$;

② 点列z_n,$|z_n|\leqslant r$;

③ 函数列$f_n(z)\in\mathscr{F}$;

④ 实数列ρ_n,$\rho_n\to 0^+$.

使得$g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$内闭一致收敛到非常数整函数$g(\xi)$,且$g(\xi)$的级至多为1[7].

引理2 设$f(z)$是复平面上级至多为1的整函数,k为正整数,$f(z)$的零点重数$\geqslant k$,n_0、…、n_k为k个非负整数,满足$n_0+\cdots+n_k\geqslant 2$,且存在$n_i\geqslant 1(0\leqslant i\leqslant k-1)$.$f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}\neq 1$,则$f(z)$为常数.

证明 若结论不成立,即$f(z)$不是常数. 以下我们分3种情况来讨论.

情形1 若$n_0=n_1=\cdots=n_{k-2}=0$,$n_{k-1}=n_k=1$.

由引理的条件得$f^{(k-1)}(z)f^{(k)}(z)\neq 1$,又由于$f(z)$是级至多为1的整函数,据Clunie等[8]中的结果知存常数c和d,使得

$$f^{(k-1)}(z)f^{(k)}(z)=1+e^{cz+d}.\qquad(1)$$

我们断言$c\neq 0$,否则若$c=0$,则由式(1)得

$$f^{(k-1)}(z)f^{(k)}(z)=1+e^{d}.\qquad(2)$$

积分式(2)得

$$(f^{(k-1)}(z))^2=2(1+e^{d})z+A,\qquad(3)$$

其中A为常数.

对式(2)分2种情况讨论:

① 若$1+e^{d}=0$,则由式(2)得$f^{(k)}(z)\equiv 0$或$f^{(k-1)}(z)\equiv 0$,这与$f(z)$的零点重数至少为k矛盾;

② 若$1+e^{d}\neq 0$,则$f^{(k-1)}(z)\neq 0$这与式(3)矛盾. 所以$c\neq 0$.

我们断言$f^{(k-1)}(z)$有无穷个零点. 否则若$f^{(k-1)}(z)$仅有有限个零点,又因为$f(z)$为级至多为1的整函数. 故可令$f^{(k-1)}(z)=p(z)e^{az+b}$,其中$p(z)$为有限次多项式,$a$、$b$为常数. 则$f^{(k)}(z)=[p'(z)+ap(z)]e^{az+b}$,则

$$f^{(k-1)}(z)f^{(k)}(z)=p(z)[p'(z)+ap(z)]e^{2(az+b)},$$

与$f^{(k-1)}(z)f^{(k)}(z)\neq 1$矛盾. 所以$f^{(k-1)}(z)$有无穷个零点.

积分式(1)得

$$[f^{(k-1)}(z)]^2=2z+\frac{2}{c}e^{cz+d}+A.\qquad(4)$$

由式(1)及式(4)得

$$c(f^{(k-1)}(z))^2-2f^{(k-1)}(z)f^{(k)}(z)=Ac+2cz-2.\qquad(5)$$

由于式(5)左边有无穷个零点而右边仅有1个零点,矛盾. 所以情形1不成立.

情形2 若$n_0=\cdots=n_{k-2}=0$,$n_{k-1}=1$,$n_k\geqslant 2$,由引理条件得

$$f^{(k-1)}(z)(f^{(k)}(z))^{n_k}\neq 1,$$

则据Clunie等[8]中的结果可知,存在常数c和d,使

$$f^{(k-1)}(z)(f^{(k)}(z))^{n_k}=1+e^{cz+d}.\qquad(6)$$

我们断言$c\neq 0$. 否则,若$c=0$,则

$$f^{(k-1)}(z)(f^{(k)}(z))n_k=1+e^{d}.\qquad(7)$$

对式(7)分2种情况讨论:

①若$1+e^{d}=0$,则由式(7)得$f^{(k)}(z)\equiv 0$或$f^{(k-1)}(z)\equiv 0$,这与$f(z)$的零点重数至少为k矛盾;

② 若$1+e^{d}\neq 0$,则$f(z)\neq 0$. 于是存在常数a和b,使得

$$f(z)=e^{az+b},\qquad(8)$$

把式(8)代入式(7)得$a^{kn_k+k-1}e^{(n_k+1)(az+b)}=1+e^{d}$,所以$a=0$,即$f(z)$为常数,矛盾. 所以$c\neq 0$.

再对式(6)分2种情况讨论.

情形2.1 若$f^{(k)}(z)\neq 0$,则存在常数a和b,使得

$$f^{(k)}(z)=e^{az+b}.\qquad(9)$$

显然$a\neq 0$,否则若$a=0$,则$f^{(k-1)}(z)$为一次多项式. 因式(6)左边仅有1个零点而右边有无穷个零点,矛盾.

积分式(9)得

$$f^{(k-1)}=\frac{1}{a}e^{az+b}+A,\qquad(10)$$

其中A为常数.

把式(9)和(10)代入(6)得

$$\frac{1}{a}e^{(n_k+1)(az+b)}+Ae^{n_k(az+b)}-e^{cz+d}=1.\qquad(11)$$

求导式(11),并整理得

$$(n_k+1)e^{[(n_k+1)a-c]z+(n_k+1)b-d}+An_kae^{(n_ka-c)z+bn_k-d}=c.\qquad(12)$$

求导式(12)并整理得

$$(n_k+1)[(n_k+1)a-c]e^{az+b}+An_ka(n_ka-c)=0. \tag{13}$$

求导式(13)并整理得

$$(n_k+1)[(n_k+1)a-c]ae^{az+b}=0, \tag{14}$$

所以

$$(n_k+1)a-c=0. \tag{15}$$

把式(15)代入式(13)得

$$(n_ka-c)An_ka=0. \tag{16}$$

对 A 分2种情况讨论:

①若 $A\neq 0$,则 $n_ka-c=0$,代入式(15)得 $a=0$,与 $a\neq 0$ 矛盾;

②若 $A=0$,由式(9)及(10)得

$$f^{(k-1)}(z)f^{(k)}(z)\neq 0, \tag{17}$$

与式(6)矛盾.

情形2.2 若存在 z_0 使 $f^{(k)}(z_0)=0$,则 z_0 为 $f^{(k-1)}(z)(f^{(k)}(z))^{n_k}$ 的重零点,而 $1+e^{cz+d}$ 仅有单重零点,这与式(6)矛盾.

情形3 其他情况. 由引理条件得 $f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}\neq 1$,则据 Clunie 等[8]中的结果知,存在常数 c 和 d,使

$$f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}=1+e^{cz+d}. \tag{18}$$

显然 $c\neq 0$. 否则若 $c=0$,则

$$f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}=1+e^{d}. \tag{19}$$

再对式(19)分2种情况讨论:

①若 $1+e^d=0$,则由式(19)知存在 $f^{(i)}(z)\equiv 0(0\leqslant i\leqslant k)$,这与 $f(z)$ 的零点重数至少为 k 矛盾;

②若 $1+e^d\neq 0$,则 $f(z)\neq 0$,则存在常数 a 和 b,使得

$$f(z)=a^{az+b}, \tag{20}$$

则 $a^{(n_1+2n_2+\cdots+kn_k)}e^{(n_0+n_1+\cdots+n_k)(az+b)}=1+e^d$,得 $a=0$,矛盾. 所以 $c\neq 0$.

以下对式(18)分2种情形讨论.

情形3.1 若 $f(z)\neq 0$,则存在常数 a 和 b,使得 $f(z)=e^{az+b}$,代入式(18)得

$$a^{n_1+2n_2+\cdots+kn_k}e^{(n_0+n_1+\cdots+n_k)(az+b)}=1+e^{cz+d}. \tag{21}$$

因式(21)左边无零点而右边有无穷个零点,矛盾.

情形3.2 若 $f(z)$ 有零点,则必为 $f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}$ 的重零点,而 $1+e^{cz+d}$ 仅有简单零点,这与式(18)矛盾.

引理3 设 $f(z)$ 为复平面上的整函数,k、m、n 为正整数,n_0、$\cdots$、n_k 为 k 个非负整数,满足 $n_0+\cdots+n_k\geqslant 2$,且存在 $n_i\geqslant 1(0\leqslant i\leqslant k-1)$. 若 $f(z)$ 的零点重数 $\geqslant m$,$f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}-1$ 的零点重数 $\geqslant n$,且 $\frac{1}{n}+\frac{k+1}{m}<1$,则 $f(z)$ 为常数.

证明 反证. 若引理的结论不成立,即 $f(z)$ 不为常数.

令 $\phi(z)=f^{n_0}(z)(f'(z))^{n_1}\cdots(f^{(k)}(z))^{n_k}$,$\Gamma_M=n_1+2n_2+\cdots+kn_k$,$\gamma_M=n_0+n_1+\cdots+n_k$.

$$m(r,\frac{1}{f^{\gamma_M}})+m(r,\frac{1}{\phi-1})\leqslant$$

$$m(r,\frac{1}{\phi})+m(r,\frac{1}{\phi-1})+S(r,f)\leqslant$$

$$m(r,\frac{1}{\phi'})+S(r,f)\leqslant T(r,\phi')-N(r,\frac{1}{\phi'})+S(r,f)\leqslant$$

$$T(r,\phi)+\overline{N}(r,f)-N(r,\frac{1}{\phi'})+S(r,f),$$

于是有

$$\gamma_MT(r,f)+T(r,\phi)\leqslant T(r,\phi)+N(r,\frac{1}{f^{\gamma_M}})+$$

$$N(r,\frac{1}{\phi-1})-N(r,\frac{1}{\phi'})+S(r,f),$$

所以有

$$\gamma_MT(r,f)\leqslant(\Gamma_M+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{\phi-1})+S(r,f)\leqslant$$

$$\frac{\Gamma_M+1}{m}T(r,f)+\frac{1}{n}N(r,\frac{1}{\phi-1})+S(r,f)\leqslant$$

$$\frac{(k+1)\gamma_M}{m}T(r,f)+\frac{\gamma_M}{n}T(r,f)+S(r,f).$$

即

$$(1-\frac{k+1}{m}-\frac{1}{n})T(r,f)\leqslant S(r,f),$$

又因为 $\frac{k+1}{m}+\frac{1}{n}<1$,所以 $T(r,f)\leqslant S(r,f)$,矛盾. 所以 $f(z)$ 为常数.

2 定理的证明

定理1的证明 若 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内不正规. 不妨设 $D=\triangle$,由引理1,对 $\alpha=\frac{\Gamma_M}{\gamma_M}$,则存在

①一个实数 r,$0\leqslant r\leqslant 1$;

②点列 z_n,$|z_n|\leqslant r$;

③函数列 $f_n(z)\in\mathscr{F}$;

④实数列 ρ_n,$\rho_n\to 0^+$.

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 内闭一致收敛到非常数整函数 $g(\xi)$,且 $g(\xi)$ 的级至多为1. 由 Hurwitz 定理得 $g(\xi)$ 的零点重数至少为 k.

由 $g_n(\xi)$ 内闭一致收敛于 $g(\xi)$ 知

$f_n^{n_0}(z_n+\rho_n\xi)(f'_n(z_n+\rho_n\xi))^{n_1}\cdots(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^{n_k}=g_n^{n_0}(\xi)(g'_n(\xi))^{n_1}\cdots(g_n^{(k)}(\xi))^{n_k}$ 内闭一致收敛到 $g^{n_0}(\xi)(g'(\xi)^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}$.

又因为

$$g_n^{n_0}(\xi)(g'_n(\xi))^{n_1}\cdots(g_n^{(k)}(\xi))^{n_k}=$$
$$f_n^{n_0}(z_n+\rho_n\xi)(f'_n(z_n+\rho_n\xi))^{n_1}\cdots(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^{n_k}\neq 1,$$
于是由 Hurwitz 定理得
$$g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}\neq 1,$$
或者
$$g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}\equiv 1.$$
若 $g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}\equiv 1$ 则 $g(\xi)\neq 0$,则存在常数 a 和 b,使得 $g(\xi)=e^{a\xi+b}$,则
$$a^{\Gamma_M}e^{\gamma_M(a\xi+b)}\equiv 1,$$
则 $a=0$ 矛盾.

若
$$g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}\neq 1,$$
由引理2得 $g(\xi)$ 为常数,矛盾. 所以 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

定理2的证明 若 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内不正规. 不妨设 $D=\triangle$,由引理1,令 $\alpha=\dfrac{\Gamma_M}{\gamma_M}$,则存在

①一个实数 $r,0\leqslant r\leqslant 1$;

②点列 $z_n,|z_m|\leqslant r$;

③函数列 $f_n(z)\in\mathscr{F}$;

④实数列 $\rho_n,\rho_n\to 0^+$.

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 内闭一致收敛到非常数整函数 $g(\xi)$,且 $g(\xi)$ 的级至多为1. 由 Hurwitz 定理得 $g(\xi)\neq 0$. 则存在常数 A 和 B 使得 $g(\xi)=e^{Az+B}$. 又因为 $g(\xi)$ 不是常数,故 $A\neq 0$.

于是
$$g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}-1=A^{\Gamma_M(Az+B)}-1$$
有无穷个单重零点. 又
$$f_n^{n_0}(z_n+\rho_n\xi)(f'_n(z_n+\rho_n\xi))^{n_1}\cdots(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^{n_k}=$$
$$g_n^{n_0}(\xi)(g'_n(\xi))^{n_1}\cdots(g_n^{(k)}(\xi))^{n_k}-1$$
内闭一致收敛到 $g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}$.

设 ζ_0 为 $g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}-1$ 的单重零点,由 Hurwitz 定理知,对充分大的 n 存在领域 $U(\zeta_0)$,在邻域 $U(\zeta_0)$ 内,$g_n^{n_0}(\xi)(g'_n(\xi))^{n_1}\cdots(g_n^{(k)}(\xi))^{n_k}-1$ 有单重零点,故
$$f_n^{n_0}(z_n+\rho_n\xi)(f'_n(z_n+\rho_n\xi))^{n_1}\cdots(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^{n_k}=$$
$$g_n^{n_0}(\xi)(g'_n(\xi))^{n_1}\cdots(g_n^{(k)}(\xi))^{n_k}-1$$
有无穷个单重零点,这与定理的条件矛盾. 所以 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

定理3的证明 若 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内不正规. 不妨设 $D=\triangle$,由引理1,令 $\alpha=\dfrac{\Gamma_M}{\gamma_M}$,则存在

①一个实数 $r,0\leqslant r\leqslant 1$;

②点列 $z_n,|z_n|\leqslant r$;

③函数列 $f_n(z)\in\mathscr{F}$;

④实数列 $\rho_n,\rho_n\to 0^+$.

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 内闭一致收敛到非常数整函数 $g(\xi)$,且 $g(\xi)$ 的级至多为1. 由 Hurwitz 定理得 $g(\xi)$ 的零点重数至少为 m.

又
$$f_n^{n_0}(z_n+\rho_n\xi)(f'_n(z_n+\rho_n\xi))^{n_1}\cdots(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^{n_k}=$$
$$g_n^{n_0}(\xi)(g'_n(\xi))^{n_1}\cdots(g_n^{(k)}(\xi))^{n_k},$$
内闭一致收敛到 $g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}$,由 Hurwitz 定理知
$$g^{n_0}(\xi)(g'(\xi))^{n_1}\cdots(g^{(k)}(\xi))^{n_k}-1$$
的零点重数 $\geqslant n$,且由条件 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{k+1}{m}<1$ 及引理3,知 $g(\xi)$ 为常数,矛盾. 所以 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

参考文献:

[1] HAYMAN W K. Picard value of meromorphic functions and their derivatives[J]. Annals of Mathmatics,1959,70:9-42.

[2] 杨乐,张广厚. Recherches sur la normalité des familles de fonctions analytiques á des valeurs multiples:I. Un nouveau critére et quelques appkications[J]. Scientia Sineca,1965,14:1258-1271.

[3] OSHKIN I. A normal criterion of families of holomorphic functions[J]. Usp Mat Nauk,1982,37:221-222.

[4] 方明亮,徐万松. 关于 Oshkin 的一个定理[J]. 南京航空航天大学学报,1993,5:714-718.

[5] PANG Xue-cheng, ZALCMAN L. On theorem of Hayman and Clunie [J]. New Zealand Journal of Mathmatics,1999,28:71-75.

[6] 顾永兴. 亚纯函数的正规性[M]. 成都:四川教育出版社,1991:57-58.

[7] ZALCMAN L. Normal families:New perspectives[J]. Bull Amer Math Soc,1998,35:215-230.

[8] CLUNIE J, HAYMAN W K. The spherical derivative of integral and meromorghic functions [J]. Comment Math Helv,1966,40:117-148.

[9] 庞学诚. Bloch 定理与正规定则[J]. 中国科学:A 辑,1989,32:782-791.

[10] 陈怀惠,顾永兴. Marty's 定则的改进与应用[J]. 中国科学:A 辑,1993,36:674-681.

[11] 杨乐. 亚纯函数的正规定则[J]. 数学学报,1985,1:181-192.

[12] CHEN Huai-hui. Yoshida functions and picard values of integral functions and their derevatives[J]. Bull Austral Math Soc,1996,54:373-381.

【责任编辑 李晓卉】