由 Laplacian 谱确定的单圈图

朱艳丽，刘木伙，李　倩
（华南农业大学 理学院，广东 广州 510642）

摘要:利用同 Laplacian 谱图的线图及有相同生成树数目的特点证明了 2 类特殊的单圈图，即 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ $(n=4k,k\in N)$ 和 $C(r,n-r+1)(n\in N)$，由它们的 Laplacian 谱确定.

关键词:同谱图；特征值；Laplacian 吨谱
中图分类号:O175.5　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1001-411X(2009)01-0107-03

The Unicyclic Graphs Which are Determined by Their Laplacian Spectra

ZHU Yan-li, LIU Mu-huo, LI Qian
(College of Sciences, South China Agricultrual University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: By using the properties of Laplacian cospectral graphs, it is proved that two special classes of unicyclic graphs, i.e., $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})(n=4k,k\in N)$ and $C(r,n-r+1)(n\in N)$, are determined by their Laplacian spectra.

Key words: cospectral graphs; eigenvalue; Laplacian spectrum

设 $G=(V,E)$ 是 m 条边的 n 阶简单无向图，其邻接矩阵和度矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}(G)$ 和 $\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}\{d_u:u\in V\}$，其中 d_u 是顶点 u 的度. 特别的，若 $d_u=k$，则称 u 为 G 的一个 k 度点. 图 G 的 Laplacian 矩阵定义为 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$，易见 $\boldsymbol{L}(G)$ 是半正则的实对称矩阵，$\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值记为 $u_1\geqslant u_2\geqslant\cdots\geqslant u_n=0$. 若 $\boldsymbol{L}(G_1)$ 和 $\boldsymbol{L}(G_2)$ 有相同的特征值，则称图 G_1 和图 G_2 同谱. 对于图 G_1 而言，若找不到另外一个图 G 使得图 G_1 和图 G 同谱，则称图 G_1 由它的 Laplacian 谱确定. $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征多项式记为：$\Phi(G)=|u\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G)|=q_1u^n+q_0u^{n-1}+\cdots+q_{n-1}u+q_n$.

P_n、C_n 分别表示 n 阶的路和圈. 由 C_r 的一个顶点与 P_{n-r+1} 的一个悬挂点粘合所得的图记为 $C(r,n-r+1)$（图 1）. 当 $n=4k(k\in N)$，由 $C_{\frac{n}{2}}$ 的每个顶点接同一条悬挂边所得的图记为 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$（图 1），由于 $n=4k$ 及二部图定义知，$C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 为二部图. 文中未定义的记号和术语均参见文献[1].

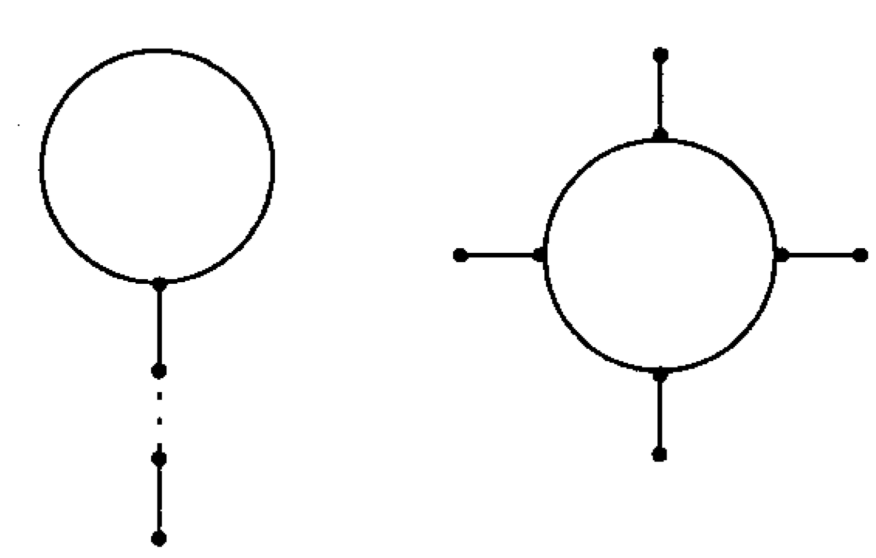

图1　单圈图 $C(r,n-r+1)$ 与 $C(4,4)$

Fig. 1　The unicyclic graphs $C(r,n-r+1)$ and $C(4,4)$

“哪些图由它们的 Laplacian 谱确定?”的问题起源于化学[2]，在图谱理论的研究中是一个困难而有趣的问题. Vandam 等[2] 和 Doob 等[3] 最先证明了所有阶数少于 5 的图和 n 阶的路、圈、完全图、完全二部正则图以及它们的补图都是由它们的 Laplacian 谱确定；此后，沈小玲等[4-5] 证明了一些树、星图以及一些特殊的似星树也是由它们的 Laplacian 谱确定；最近，Omidi 等[6] 证明了一般的似星树都是由它的

收稿日期:2008-02-21
作者简介:朱艳丽(1979—)，女，讲师，E-mail: yanlizhu130@tom.com
基金项目:华南农业大学校长基金(2008K012)

Laplacian 谱确定. 在此基础上,本文证明了2类特殊的单圈图,即 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})(n=4k,k\in N)$ 和 $C(r,n-r+1)(n\in N)$ 由它们的 Laplacian 谱确定.

主要结果

引理1 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times n$ 矩阵,则下列命题等价:

(1) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同谱;

(2) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式;

(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^i)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^i),i=1,2,\cdots,n$[2].

设 A 是图 G 的邻接矩阵,$\mathrm{tr}(A^i)$ 表示 G 中长为 i 的闭回路的总个数. 若 G_1 和 G_2 同谱,则由引理1可知,对于任意给定的 i,G_1 和 G_2 含有相同数目的长为 i 的闭回路. 特别的,它们有相同的边数($i=2$)和三角形数目($i=3$).

引理2 设 G 是 m 条边的 n 阶无向图,则 $\Phi(G)=q_0u^n+q_1u^{n-1}+\cdots+q_{n-1}u+q_n$ 满足:$q_0=1,q_1=-2m,q_2=2m^2-m-\frac{1}{2}\sum d_i^2,q_{n-1}=(-1)^{n-1}n\tau(G)$, $q_n=0$,其中 $\tau(G)$ 表示 G 中生成树的数目[7].

由引理2可知,图 G 的阶数、边数、生成树的个数由它的 Laplacian 谱确定.

引理3 设图 G 有 n 个顶点,$\bar{G}$ 是它的补图,则 $u_i(G)=n-u_{n-1}(\bar{G}),1\leqslant i\leqslant n-1$[8-9].

由引理3可知,若 G 由 G 的 Laplacian 谱确定,则 $\bar{\mathrm{G}}$ 也由 $\bar{\mathrm{G}}$ 的 Laplacian 谱确定.

引理4 在图 G 中若 $V(G)\neq\varnothing,E(G)\neq\varnothing$,则

$$\Delta(G)+1\leqslant u_1(G)\leqslant \max\left\{\frac{d_u(d_u+m_u)+d_v(d_v+m_v)}{d_u+d_v},uv\in E(G)\right\},$$

其中 m_v 表示 v 的邻点的平均度,$\Delta(G)$ 表示 G 中顶点的最大度. 进一步的,若 G 是至少有2个顶点的连通图,则 $u_1(G)=\Delta(G)+1$ 当且仅当 $|V(G)|=\Delta(G)+1$[10-11].

引理5 设 G 是 n 阶的二部图,$X(G)$ 是它的线图,则 $u_i(G)=\lambda_i(X(G))+2$,其中 $\lambda_i(X(G))$ 是图 $X(G)$ 的邻接矩阵的第 i 大特征值,$i=1,2,\cdots,n-1$[12].

引理6 $u_{n-1}(G)>0$ 当且仅当 G 是连通图[13].

定理1 设 $n=4k(k\geqslant 2)$,则 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 由它的 Laplacian 谱确定.

证明: 由图1可知 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 为 n 条边的 n 阶单圈图,有 $\frac{n}{2}$ 个3度点,$\frac{n}{2}$ 个悬挂点. 由引理4可知,$4<u_1(C(\frac{n}{2},\frac{n}{2}))\leqslant 5\frac{1}{3}$. 设图 G 与 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 同谱,若 $\Delta(G)\geqslant 5$,由引理4可得 $u_1(G)\geqslant 5+1=6$,矛盾. 故 $\Delta(G)\leqslant 4$.

由于 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 连通,故 $\mu_{n-1}(G)=\mu_{n-1}(C(\frac{n}{2},\frac{n}{2}))>0$,由引理6可知 G 也是连通的. 由引理2可知 G 是有 n 条边的 n 阶单圈图,且 G 与 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 有相同数目的生成树. 注意到连通的单圈图的生成树数目等于它的圈长,所以 G 与 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 的圈长相等. 又因为 $n=4k$,故 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 是二部图,从而 G 也是连通的二部图. 由引理5可知,$X(G)$ 和 $X(C(\frac{n}{2},\frac{n}{2}))$ 关于邻接矩阵同谱,它们含有相同数目的三角形. 设 G 有 x 个4度点,y 个3度点,z 个2度点,直接计算可知 $X(G)$ 有 $4x+y$ 个三角形. 而 $X(C(\frac{n}{2},\frac{n}{2}))$ 有 $\frac{n}{2}$ 个三角形,结合引理2可得下列方程组:

$$\begin{cases}4x+y=\frac{n}{2}\\ 4x+3y+2z+n-x-y-z=2n\\ 4^2x+3^2y+2^2z+n-x-y-z=3^2\times\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\end{cases}$$

解得 $x=0,y=\frac{n}{2},z=0$. 即 G 是有 $\frac{n}{2}$ 个3度点,$\frac{n}{2}$ 个悬挂点的连通单圈图,且圈长和 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 相等,故 G 与 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ 同构.

定理2 $C(r,n-r+1)$ 由它的 Laplacian 谱确定.

证明: 由图1可知 $C(r,n-r+1)$ 是 n 条边的 n 阶单圈图,有1个3度点,$n-2$ 个2度点,1个悬挂点. 由引理4可得 $4<u_1(C(r,n-r+1))\leqslant 4\frac{4}{5}$. 设图 G 与 $C(r,n-r+1)$ 同谱,若 $\Delta(G)\geqslant 4$,由引理4可得 $u_1(G)\geqslant 4+1=5$,矛盾. 故 $\Delta(G)\leqslant 3$.

由于 $C(r,n-r+1)$ 连通,故 $\mu_{n-1}(G)=\mu_{n-1}(C(r,n-r+1))>0$,由引理6可知 G 也是连通的. 由引理2可知 G 是 n 条边的 n 阶单圈图,且 G 与 $C(r,n-r+1)$ 有相同数目的生成树. 注意到连通的单圈图的生成树数目等于它的圈长,故 G 与 $C(r,n-r+1)$ 的圈长相等. 设 G 有 x 个3度点,y 个2度点. 由

引理2可得下列方程组:

$$\begin{cases}3x+2y+n-x-y=2n\\ 3^2x+2^2y+n-x-y=3^2+2^2(n-2)+1\end{cases}$$

解得 $x=1, y=n-2$. 即 G 是有1个3度点, $n-2$ 个2度点,1个悬挂点的连通单圈图,且圈长和 $C(r,n-r+1)$ 相等,所以 G 与 $C(r,n-r+1)$ 同构.

由引理3、定理1、定理2可得.

定理3 $C(\frac{n}{2},\frac{n}{2})(n=4k, k\in N)$ 与 $C(r,n-r+1)(n\in N)$ 的补图由它们的 Laplacian 谱确定.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmillan, 1976.

[2] VANDAM E R, HAEMERS W H. Which graphs are determined by their spectrum[J]. Linear Aigebra Appl, 2003, 373: 241-272.

[3] DOOB M, HAEMERS W H. The complement of the path is determined by its spectrum[J]. Linear Algbra Appl, 2002, 356: 57-65.

[4] 沈小玲,张远平. 星图和最大度为3的似星树由它们的 Laplacian 吨谱确定[J]. 湖南师范大学学报, 2005, 28(1): 17-20.

[5] 沈小玲,侯耀平. 一些由它的 Laplacian 吨谱确定的树[J]. 湖南师范大学学报, 2006, 29(1): 21-24.

[6] OMIDI G R, TAJBAKHSH K. Starlike trees are determined by their Laplacian 吨 spectrum[J]. Linear Algbra Appl, 2007, 422: 654-658.

[7] OLIVEIRA C S, DENMM A, JURKIEWIL Z S. The characteristic polyomial of the Laplacian 吨 of graphs in (a,b)-linear chasses[J]. Linear Algbra Appl, 2002, 356: 113-121.

[8] KELMANS A K. The number of trees of a graph I[J]. Automati Telemab (Automat Remote Control), 1965, 26: 154-204.

[9] KELMANS A K. The number of trees of a graph I[J]. Automati Telemab (Automat Remote Control), 1966, 27: 56-65.

[10] KELMANS A K, GHELNOKOV V M. A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal numbers of trees[J]. J Combin Theory Ser, 1974, 16(B): 197-214.

[11] LI Jiong-sheng, ZHANG Xiao-dong. On the Laplacian eigenvalues of a graph[J]. Linear Algebra Appl, 1998, 285: 305-307.

[12] CUTMAN I, GINEITYE V, LEPOVIC M. The high energy band in the photoelectron spectrun of alkanes and its dependence on moleular structure[J]. J Serb Chem Soc, 1999, 64: 673-680.

[13] FIEDLER M. Algebraic connectivity of graphs[J]. Czechoslovak Math J, 1973, 23: 298-305.

【责任编辑　李晓卉】

(上接第106页)

所描述的所有功能,具有如下特色:

(1)地理数据与属性数据的紧密结合,通过可视化的方式把数据呈现给用户;

(2)放大、缩小、漫游及地物选择功能,对古树名木周围的环境一目了然;

(3)古树名木视频、古树名木维护记录、古树名木周围环境的改善和生长情况的记录,对古树名木的情况进行跟踪;

(4)各种查询功能的实现,可有针对性地了解古树名木和进行数据输出;

(5)报表和导出数据等功能,可实现古树名木资料的快速上报、共享等;

(6)空间分析,从空间上更清楚地了解古树名木的位置,周围的环境,并可以量化空间的相对距离,对古树名木的定位将更加准确.

参考文献:

[1] 王元胜,甘长青,周肖红. 香山公园古树名木地理信息系统的开发技术研究[J]. 北京林业大学学报, 2003, 25(2): 55-57.

[2] 温小荣,周春国,徐海兵,等. 中山陵园古树名木地理信息系统的研建[J]. 南京林业大学学报: 自然科学版, 2006, 30(5): 139-142.

[3] 温小荣,周春国,徐海兵,等. 组件式 GIS 技术在古树名木地理信息系统中的应用[J]. 福建林业科技, 2006, 33(4): 74-76.

[4] 林孝松. 城市古树名木地理信息系统建设初步研究[J]. 福建林业科技, 2007, 34(2): 210-214.

[5] 王凌怡. 泉州市古树名木保护信息管理系统的建立[J]. 福建热作科技, 2006, 31(4): 37-39.

[6] 刘光. 地理信息系统二次开发教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 10-24.

[7] 刘光,刘小东. 地理信息系统二次开发实用教程——VB. NET 和 MapObjects 实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 9-11.

【责任编辑　李晓卉】