一类二阶非线性中立型方程的振动定理

付银莲，文　斌
（华南农业大学 理学院，广东 广州 510642）

摘要：利用 $\Phi(t,s,r)$ 型函数和 Riccati 技巧，建立了一类具有连续分布滞量的二阶非线性中立型微分方程的一些新的振动准则.

关键词：中立型方程；振动；连续分布滞量
中图分类号：O175.12　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-411X(2009)02-0105-04

Oscillation Theorems for a Class of Second Order Nonlinear Neutral Equations

FU Yin-lian, WEN Bin
(College of Sciences, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: By using functions of the form $\Phi(t,s,r)$ and a Riccati technique, some new oscillation criteria were established for a class of second order nonlinear neutral differential equations with continuous distributed delay.

Key words: neutral equation; oscillation; continuous distributed delay

考虑具有连续分布滞量的二阶非线性中立型微分方程

$$[x(t)+p(t)x(\tau(t))]''+\int_a^b q(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)=0, t\geqslant t_0, \quad (1)$$

的振动性.

本文中记 $I=[t_0,\infty)$，$R_0=[0,\infty)$，$R_+=(0,\infty)$ 且始终假设下列条件成立：

(C1) $p(t)\in C(I,[0,1])$；

(C2) $\tau(t)\in C(I,\mathbf{R})$，$\tau(t)\leqslant t$，$t\in I$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$；

(C3) $q(t,\xi)\in C(I\times[a,b],R_0)$ 且 $q(t,\xi)$ 在任意的 $[t_\mu,\infty)\times[a,b]$，$t_\mu\geqslant t_0$ 上不最终为0；

(C4) $f(x)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$f(x)/x\geqslant k>0$，$x\neq 0$，$k$ 为常数；

(C5) $g(t,\xi)\in C(I\times[a,b],\mathbf{R})$，$g(t,\xi)\leqslant t$，$\xi\in[a,b]$，$g(t,\xi)$ 关于 t 和 ξ 非减且 $g'(t,a)>0$，$t\in I$，$\lim\limits_{t\to\infty}\inf\limits_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=\infty$；

(C6) $\sigma(\xi)\in C([a,b],\mathbf{R})$ 为非减函数，方程(1)中的积分是 Stieltjes 积分.

仅限于考虑方程(1)的正常解，即不最终恒为0的非常数解. 一个正常解称为振动的，如果它具有任意大的零点；否则，称之为非振动的. 如果方程(1)的所有正常解都是振动的，那么称方程(1)是振动的.

中立型方程的广泛应用，使得近年来中立型方程的振动问题受到很大关注，也得到了许多结果[1-4]，这些结果都是以 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup[\cdot]=\infty$ 的形式给出. 受 Sun[5]，Yang[6-7] 和 Dubé 等[8] 工作的启发，本文引进三元函数类 Y 对方程(1)建立一些新的振动准则，结果形式变为 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup[\cdot]>$ 常数.

下面定义函数类 Y. 记 $E=\{(t,s,r): t\geqslant s\geqslant r\geqslant t_0\}$，$E_0=\{(t,s,r): t>s>r\geqslant t_0\}$. 称函数 $\Phi=\Phi(t,s,r)$ 属于函数类 Y，记作 $\Phi\in Y$，如果 $\Phi\in C(E,R_0)$ 满足：$t\geqslant r\geqslant t_0$ 时 $\Phi(t,t,r)=\Phi(t,r,r)=0$，$(t,s,r)\in E_0$ 时 $\Phi(t,s,r)>0$，且 $\Phi(t,s,r)$ 在 E_0 上对 s 有连续偏导数，使得

$$\frac{\partial\Phi(t,s,r)}{\partial s}=\phi(t,s,r)\Phi(t,s,r). \quad (2)$$

收稿日期：2008-02-28
作者简介：付银莲(1969—)，女，讲师，硕士，E-mail: fuyl68@scau.edu.cn

设 $\Phi\in Y$, $g(t)\in C(I,\mathbf{R})$. 定义算子 $A[.\,;r,t]$ 如下：

$$A[g;r,t]=\int_r^t \Phi(t,s,r)g(s)\mathrm{d}s,(t,s,r)\in E. \quad (3)$$

容易验证 $A[.\,;r,t]$ 是线性算子,并且满足

$$A[g';r,t]=-A[g\phi;r,t],\quad g\in C^1(I,\mathbf{R}). \ (4)$$

回顾 Philos[9] 定义的已被广泛应用的二元函数类 X. 设 $D=\{(t,s):t\geqslant s\geqslant t_0\}$, $D_0=\{(t,s):t>s\geqslant t_0\}$,称 $H=H(t,s)$ 属于函数类 X,记作 $H\in X$,如果 $H\in C(D,R_0)$ 满足:$t\geqslant t_0$ 时 $H(t,t)=0$,$(t,s)\in D_0$ 时 $H(t,s)>0$,且 $H(t,s)$ 在 D_0 上关于 t 和 s 有连续偏导数.

注意到对任何 $H_1,H_2\in X$,有 $H_1(t,s)H_2(s,r)\in Y$. 下面将利用函数 $H_1,H_2\in X$ 的乘积 $H_1(t,s)H_2(s,r)$ 对方程(1)建立几个新的振动结果.

本文得到的振动准则适用于下列方程

$$[x(t)+p(t)x(\tau(t))]''+\sum_{i=1}^n q_i(t)f_i(x[g_i(t)])=0,t\geqslant t_0.$$

1 Kamenev 型振动准则

定理 1.1 如果对每一个 $r\geqslant t_0$,存在函数 $\Phi\in Y$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty} A\left[k\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)-\frac{\phi^2(t,s,r)}{4g'(s,a)};r,t\right]>0, \quad (5)$$

其中算子 A、函数 $\phi(t,s,r)$ 分别由式(3)和(2)定义,那么方程(1)振动.

证明 若方程(1)有一非振动解 $x(t)$,不妨设存在充分大的 $t_1\geqslant t_0$ 使得对所有 $t\geqslant t_1$, $x(t)>0$(若 $x(t)$ 最终为负,可类似证之). 由 $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$, $\liminf\limits_{t\to\infty,\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=\infty$ 知存在 $t_2\geqslant t_1$ 使得 $x(\tau(t))>0,x[g(t,\xi)]>0,t\geqslant t_2,\xi\in[a,b]$.

令

$$z(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t)), \quad (6)$$

则有

$$z(t)\geqslant x(t)>0,z''(t)\leqslant 0,t\geqslant t_2.$$

可以断言 $z'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_2$. 若不然,则存在 $t_3\geqslant t_2$ 使得 $z'(t_3)<0$. 由 $z''(t)\leqslant 0,t\geqslant t_2$ 有 $z'(t)\leqslant z'(t_3)<0,t\geqslant t_3$. 从 t_3 到 t 积分得 $z(t)\leqslant z(t_3)+z'(t_3)(t-t_3)$. 因此得到 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=-\infty$,这与 $z(t)>0,t\geqslant t_2$ 矛盾.

由方程(1),式(6)和(C4)得到

$$0=z''(t)+\int_a^b q(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)\geqslant z''(t)+k\int_a^b q(t,\xi)\{z[g(t,\xi)]-p[g(t,\xi)]x(\tau[g(t,\xi)])\}\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

利用 $\tau(t)\leqslant t,t\in I$ 和 $z'(t)\geqslant 0,z(t)\geqslant x(t),t\geqslant t_2$ 可得 $z[g(t,\xi)]\geqslant z(\tau[g(t,\xi)])\geqslant x(\tau[g(t,\xi)])$,因此

$$z''(t)+k\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}z[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0,t\geqslant t_2,$$

进一步,由 $g(t,\xi)$ 关于 ξ 非减得 $z[g(t,a)]\leqslant z[g(t,\xi)],\xi\in[a,b]$. 从而

$$z''(t)+kz[g(t,a)]\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0,t\geqslant t_2.$$

令

$$w(s)=\frac{z'(s)}{z[g(s,a)]},s\geqslant t_2,$$

注意到 $z''(t)\leqslant 0,t\geqslant t_2$ 和 $g(t,\xi)\leqslant t,\xi\in[a,b]$,有 $z'(t)\leqslant z'[g(t,a)],t\geqslant t_2$. 因此

$$w'(s)=\frac{z''(s)}{z[g(s,a)]}-\frac{z'(s)z'[g(s,a)]g'(s,a)}{z^2[g(s,a)]}\leqslant -k\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)-g'(s,a)w^2(s),$$

即

$$k\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant -w'(s)-g'(s,a)w^2(s),s\geqslant t_2. \quad (7)$$

对式(7)应用算子 $A[.\,;r,t]$ $(t\geqslant r\geqslant t_2)$,并利用式(4)得

$$A\left[k\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi);r,t\right]\leqslant A[w(s)\phi(t,s,r)-g'(s,a)w^2(s);r,t]=A\left[-\left(\sqrt{g'(s,a)}w(s)-\frac{\phi(t,s,r)}{2\sqrt{g'(s,a)}}\right)^2+\frac{\phi^2(t,s,r)}{4g'(s,a)};r,t\right]\leqslant A\left[\frac{\phi^2(t,s,r)}{4g'(s,a)};r,t\right]. \quad (8)$$

由式(8)得到

$$\limsup_{t\to\infty} A\left[k\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)-\frac{\phi^2(t,s,r)}{4g'(s,a)};r,t\right]\leqslant 0,$$

这与式(5)相矛盾,故定理 1.1 得证.

由定理 1.1 可知,选择不同的 $\Phi(t,s,r)$ 可得到方程(1)不同的振动的充分条件. 例如,取 $\Phi(t,s,r)=H_1(t,s)H_2(s,r)$,其中 $H_1,H_2\in X$. 定义 h_1,h_2 如下:

$$\frac{\partial H_1(t,s)}{\partial s}=-h_1(t,s)\sqrt{H_1(t,s)},$$

$$\frac{\partial H_2(s,r)}{\partial s} = h_2(s,r)\sqrt{H_2(s,r)}, \tag{9}$$

其中 h_1,h_2 在 D 上局部可积. 那么根据定理 1.1 可得下列定理.

定理 1.2　如果对每一个 $r \geqslant t_0$, 存在函数 $H_1, H_2 \in X$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_r^t H_1(t,s)H_2(s,r)\left[k\int_a^b q(s,\xi)\{1 - p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - \frac{1}{4g'(s,a)}\left(\frac{h_2(s,r)}{\sqrt{H_2(s,r)}} - \frac{h_1(t,s)}{\sqrt{H_1(t,s)}}\right)^2\right]\mathrm{d}s > 0,$$

其中 h_1,h_2 由式(9)定义, 那么方程(1)振动.

若取 $\Phi(t,s,r) = \rho(s)(t-s)^\alpha(s-r)^\beta$, 其中 $\rho(s) \in C^1(I,R_+)$, $\alpha,\beta > 1$ 为常数, 则由定理 1.1 可得下列振动结果.

定理 1.3　如果对每一个 $r \geqslant t_0$, 存在函数 $\rho(s) \in C^1(I,R_+)$ 和常数 $\alpha,\beta > 1$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_r^t \rho(s)(t-s)^\alpha(s-r)^\beta\left[k\int_a^b q(s,\xi)\{1 - p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - \frac{1}{4g'(s,a)}\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} + \frac{\beta t - (\alpha+\beta)s + \alpha r}{(t-s)(s-r)}\right)^2\right]\mathrm{d}s > 0,$$

那么方程(1)振动.

进一步, 在定理 1.3 中令 $\rho(s) \equiv 1$, 并设 $g'(s,a) \geqslant \delta > 0$, $s \in I$, δ 为常数, 则可得到下列重要结果.

定理 1.4　设 $g'(s,a) \geqslant \delta > 0$, $s \in I$, δ 为常数. 如果对每一个 $r \geqslant t_0$, 存在常数 $\alpha,\beta > 1$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\alpha+\beta-1}}\int_r^t (t-s)^\alpha(s-r)^\beta\int_a^b \delta k q(s,\xi)\{1 - p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s > \alpha\beta(\alpha+\beta-2)\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta-1)}{4\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{10}$$

那么方程(1)振动.

证明　若方程(1)有一非振动解 $x(t)$, 不妨设存在充分大的 $t_1 \geqslant t_0$, 使得对所有 $t \geqslant t_1$, $x(t) > 0$. 同定理 1.1 的证明得到式(8), 取 $\Phi(t,s,r) = (t-s)^\alpha(s-r)^\beta$ 可得

$$\int_r^t (t-s)^\alpha(s-r)^\beta\int_a^b kq(s,\xi)\{1 - p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s \leqslant \int_r^t (t-s)^{\alpha-2}(s-r)^{\beta-2}\frac{[\beta t - (\alpha+\beta)s + \alpha r]^2}{4g'(s,a)}\mathrm{d}s,$$

从而

$$\int_r^t (t-s)^\alpha(s-r)^\beta\int_a^b \delta k q(s,\xi)\{1 - p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{4}\int_r^t (t-s)^{\alpha-2}(s-r)^{\beta-2}[\beta(t-s) - \alpha(s-r)]^2\mathrm{d}s. \tag{11}$$

令 $u = s-r$, $v = t-r$, 可得

$$\int_r^t (t-s)^{\alpha-2}(s-r)^{\beta-2}[\beta(t-s) - \alpha(s-r)]^2\mathrm{d}s = \int_0^{t-r} u^{\beta-2}(t-r-u)^{\alpha-2}[\beta(t-r-u) - \alpha u]^2\mathrm{d}u = \int_0^v u^{\beta-2}(v-u)^{\alpha-2}[\beta(v-u) - \alpha u]^2\mathrm{d}u =$$

$$\beta^2\int_0^v u^{\beta-2}(v-u)^\alpha\mathrm{d}u - 2\alpha\beta\int_0^v u^{\beta-1}(v-u)^{\alpha-1}\mathrm{d}u + \alpha^2\int_0^v u^\beta(v-u)^{\alpha-2}\mathrm{d}u. \tag{12}$$

利用下列欧拉 Beta 函数:

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, Re(m,n) > 0,$$

令 $x = \frac{u}{v}$, 可得

$$\int_0^v u^{\beta-2}(v-u)^{\alpha-2}[\beta(v-u) - \alpha u]^2\mathrm{d}u = \beta^2 v^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\beta-1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} - 2\alpha\beta v^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \alpha^2 v^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} =$$

$$v^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\beta-1)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left[\beta^2\alpha(\alpha-1) - 2\alpha\beta(\beta-1)(\alpha-1) + \alpha^2\beta(\beta-1)\right] = \alpha\beta(\alpha+\beta-2)\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}v^{\alpha+\beta-1}. \tag{13}$$

代回 $v = t-r$, 根据式(12)和(13)得到

$$\int_r^t (t-s)^{\alpha-2}(s-r)^{\beta-2}[\beta(t-s) - \alpha(s-r)]^2\mathrm{d}s = \alpha\beta(\alpha+\beta-2)\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-r)^{\alpha+\beta-1}. \tag{14}$$

由式(11)和(14)得到

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\alpha+\beta-1}}\int_r^t (t-s)^\alpha(s-r)^\beta\int_a^b \delta k q(s,\xi)\{1 - p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s \leqslant \alpha\beta(\alpha+\beta-2)\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta-1)}{4\Gamma(\alpha+\beta)},$$

这与式(10)相矛盾. 定理 1.4 证毕.

由定理 1.4 可得下列推论.

推论 1.1　如果对每一个 $r \geqslant t_0$, 存在常数 $\lambda > \frac{1}{2}$ 或 $\mu > \frac{1}{2}$, 分别使得

① $\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{2\lambda+1}}\int_r^t (t-s)^{2\lambda}(s-r)^2$

$$\int_a^b \delta k q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s > \frac{\lambda}{(2\lambda-1)(2\lambda+1)},$$

或

② $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{2\mu+1}}\int_r^t (t-s)^2(s-r)^{2\mu}\int_a^b \delta k q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s > \frac{\mu}{(2\mu-1)(2\mu+1)},$$

那么方程(1)振动.

证明 ① 在式(10)中令 $\alpha=2\lambda,\lambda>\frac{1}{2},\beta=2$,得到

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{2\lambda+1}}\int_r^t (t-s)^{2\lambda}(s-r)^2\int_a^b \delta k q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s >$$

$$(2\lambda)2(2\lambda+2-2)\frac{\Gamma(2\lambda-1)\Gamma(2-1)}{4\Gamma(2\lambda+2)} = \frac{8\lambda^2\Gamma(2\lambda-1)}{4(2\lambda+1)(2\lambda)(2\lambda-1)\Gamma(2\lambda-1)} = \frac{\lambda}{(2\lambda-1)(2\lambda+1)}.$$

② 在式(10)中令 $\alpha=2,\beta=2\mu,\mu>\frac{1}{2}$,类似于①,可得证. 推论1.1证毕.

2 区间振动准则

可以看到第1节中的结果都包含系数 p 和 q 的积分,因此需要系数在整个$[t_0,\infty)$上的信息. 本节中,将对方程(1)建立几个新的区间振动准则,即由方程(1)(或 p 和 q)仅仅在$[t_0,\infty)$的一系列子区间上的性质给出的准则.

定理2.1 如果对每一个 $r\geqslant t_0$,存在函数 $\Phi\in Y$ 和常数 $d>c\geqslant r$,使得

$$A\left[k\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - \frac{\phi^2(d,s,c)}{4g'(s,a)};c,d\right] > 0,$$

其中算子 A、函数 $\phi(d,s,c)$ 分别由式(3)和(2)定义,那么方程(1)振动.

证明 同定理1.1的证明,将其中的 t、r 分别用 d 和 c 替换,可以看到方程(1)的每个解在区间(c,d)中至少有一个零点,即方程(1)的每个解在$[t_0,\infty)$上有任意大的零点,从而方程(1)振动. 定理2.1证毕.

类似于第1节中的讨论,可得下列推论.

推论2.1 如果对每一个 $r\geqslant t_0$,存在函数 $H_1,H_2\in X$和常数 $d>c\geqslant r$,使得

$$\int_c^d H_1(d,s)H_2(s,c)\left[k\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - \frac{1}{4g'(s,a)}\left(\frac{h_2(s,c)}{\sqrt{H_2(s,c)}}-\frac{h_1(d,s)}{\sqrt{H_1(d,s)}}\right)^2\right]\mathrm{d}s > 0,$$

其中 h_1、h_1 由式(9)定义,那么方程(1)振动.

推论2.2 如果对每一个 $r\geqslant t_0$,存在函数$\rho(s)\in C^1(I,R_+)$和常数 $\alpha,\beta>1,d>c\geqslant r$,使得

$$\int_c^d \rho(s)(d-s)^\alpha(s-c)^\beta\left[k\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - \frac{1}{4g'(s,a)}\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+\frac{\beta d-(\alpha+\beta)s+\alpha c}{(d-s)(s-c)}\right)^2\right]\mathrm{d}s > 0,$$

那么方程(1)振动.

参考文献:

[1] LI Horng-jaan, LIU Wei-ling. Oscillations of second order neutral differential equations[J]. Math Comput Modelling, 1995, 22: 45-53.

[2] WANG Pei-guang, LI Xue-wen. Further results on oscillation of a class of second-order neutral equations[J]. J Comput Appl Math, 2003, 157: 407-418.

[3] WANG Pei-guang. Oscillation criteria for second-order neutral equations with distributed deviating arguments[J]. Comput Math Appl, 2004, 47:1935-1946.

[4] YU Yuan-hong, FU Xi-lin. Oscillation of second order nonlinear neutral equations with continuous distributed deviating argument[J]. Rad Mat, 1991, 7: 167-176.

[5] SUN Yun-gong. New Kamenev-type oscillation criteria for second-order nonlinear differential equations with damping[J]. J Math Anal Appl, 2004, 291: 341-351.

[6] YANG Qi-gui. Oscillation of self-adjoint linear matrix Hamiltonian systems[J]. J Math Anal Appl, 2004, 296: 110-130.

[7] YANG Qi-gui. On the oscillation of certain nonlinear neutral partial differential equations[J]. Appl Math Lett, 2007,20:900-907.

[8] DUBÉ S G A, MINGARELLI A B. Nonlinear functionals and a theorem of Sun[J]. J Math Anal Appl, 2005, 308: 208-220.

[9] PHILOS C G. Oscillation theorems for linear differential equations of second order[J]. Arch Math, 1989,53: 482-492.

【责任编辑 李晓卉】