一类趋化性生物模型的有限差分

郭昌洪，房少梅，王 霞
（华南农业大学 理学院，广东 广州 510642）

摘要:研究了一类趋化性(Chemotaxis)生物模型的有限差分,证明了此差分格式的稳定性,并给出了算法和数值例子.

关键词:趋化性; 有限差分; 稳定性; 数值解
中图分类号:O175.7　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1001-411X(2009)03-0110-04

Finite Difference in a Biological Model for Chemotaxis

GUO Chang-hong, FANG Shao-mei, WANG Xia
(College of Sciences, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: The finite difference in a biological model for chemotaxis was studied, and stability of the finite difference was proven. At last the theoretical results were checked by numerical examples.

Key words: chemotaxis; finite difference; stability; numerical solution

目前对趋化性生物模型(Chemotaxis)已经做出了相当多的研究[1-4],现我们讨论如下的 Keller-Segel 数学模型

$$\frac{\partial b}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu(s)\frac{\partial b}{\partial x}-\chi(s)b\frac{\partial s}{\partial x}\right\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=D\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\kappa(s)b, \tag{2}$$

其中,$b(x,t)$为细菌的密度,$s(x,t)$为营养物的浓度,$D\geqslant 0$为营养物的分子扩散系数,$\mu(s)$表示细菌的自由迁移强度,$\chi(s)$为趋化性的反应系数,$\kappa(s)$表示单个细菌消耗营养物的速率.

对$D=0$时,前人利用相平面分析的方法得到了相应方程行波解存在的充分条件[1-2]. 黎勇[3]利用相平面分析方法在$\mu(s)$,$\chi(s)$,$\kappa(s)$均为幂函数的特殊情形下得到了行波解存在的充分必要条件. 孔祥红等[4]采用直接积分的方法给出了入场波解存在的充分必要条件. 本文讨论当$D>0$时,在$r=0$, $p=1$, $1-\beta<\alpha<1$情形下,方程(1)、(2)的数值模拟问题,并且构造了该问题的有限差分格式,证明了稳定性,最后给出了数值例子. 以前给出的是关于理论证明解的存在性,本文在此给出了其数值解及其解的模拟.

1 问题与记号

对上述模型里的$\mu(s)$,$\chi(s)$,$\kappa(s)$取以下的幂函数形式

$$\mu(s)=\mu_0 s^r,\chi(s)=\kappa_0 s^\alpha,\kappa(s)=\delta_0/s^p,$$

其中:$\mu_0,\chi_0,\delta_0\geqslant 0$;$r,\alpha,p$均为常数. 于是可以得到

$$\frac{\partial b}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu_0 s^r\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\delta_0 b}{s^p}\frac{\partial s}{\partial x}\right\}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=D\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\kappa_0 s^\alpha b. \tag{4}$$

对方程(3)、(4)做变换:$\sqrt{\kappa_0/\mu_0}\,x=\bar{x}$,$\kappa_0 t=\bar{t}$,并令$\xi=D/\mu_0$,而又为了方便,仍记$\bar{x}$,$\bar{t}$为$x$,$t$,于是方程(3)、(4)可变为

$$\frac{\partial b}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{s^r\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\beta b}{s^p}\frac{\partial s}{\partial x}\right\}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\xi\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-s^\alpha b, \tag{6}$$

其中,$D>0$,$r=0$,$p=1$,$1-\beta<\alpha<1$条件下可得方程

收稿日期:2008-10-20
作者简介:郭昌洪(1986—),男,硕士研究生; 通讯作者:房少梅(1964—),女,教授,博士,E-mall:dz90@scau.edu.cn
基金项目:国家自然科学基金(10576013,10871075);广东省自然科学基金(05300889)

(7) ~ (10)

$$\frac{\partial b}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\beta b}{s}\frac{\partial s}{\partial x}\right\},\quad x\in[0,\ L] \tag{7}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\xi\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-s^\alpha b,\quad t\in[0,\ T] \tag{8}$$

$$b(x,0)=b_0(x),b_t(x,0)=b_t(x),\quad b(0,t)=b(L,t)=0, \tag{9}$$

$$s(x,0)=s_0(x),s_t(x,0)=s_t(x),\quad s(0,t)=s(L,t)=0. \tag{10}$$

设 $\Omega=[0,L]$, $I=[0,T]$ $(T>0)$. 对平面区域 $\Omega\times I$ 作网格剖分,取空间步长 $h=L/N$,取时间步长 τ,记 $x_j=jh$, $t_j=k\tau$ $(j=0,1,2,\cdots,N;k=0,1,2,\cdots,[T/\tau])$, N 为正整数.

设 b^k, s^k 为第 k 时间的网格函数.

约定:

$$b_{jx}^k=\frac{b_{j+1}^k-b_j^k}{h},\ b_{j\bar{x}}^k=\frac{b_j^k-b_{j-1}^k}{h},$$

$$b_{j\hat{x}}^k=\frac{b_{j+1}^k-b_{j-1}^k}{2h}=\frac{1}{2}(b_{jx}^k+b_{j\bar{x}}^k),$$

其中, b_j^k 是网格函数 b^n 在 $(jh,k\tau)$ 处的近似值. 同样可以定义关于时间 t 的差商形式 b_{jt}^k, $b_{j\bar{t}}^k$, $b_{j\hat{t}}^k$.

在方程(7)中,令 $C(x,t)=b/s$, $A=\partial b/\partial x$, $B=-\beta C(x,t)\partial s/\partial x$,在矩形域中 $[x_{j-1/2}\leqslant x\leqslant x_{j+1/2},t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}]$,对方程(7)积分可得

$$\int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1/2}}[b(x,t_{k+1})-b(x,t_k)]\mathrm{d}x=\int_{t_k}^{t_{k+1}}[A(x_{j+1/2},t)-A(x_{j-1/2},t)+B(x_{j+1/2},t)-B(x_{j-1/2},t)]\mathrm{d}t, \tag{11}$$

其中

(a) $A(x_{j-1/2},t)=\dfrac{\partial b}{\partial x}(x_{j+1/2},t)=\dfrac{b(x_j,t)-b(x_{j-1},t)}{h}$,

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}}A(x_{j-1/2},t)\mathrm{d}t=\theta_1 A(x_{j-1/2},t_{k+1})+(1-\theta_1)A(x_{j-1/2},t_k)=\theta_1\frac{b(x_j,t_{k+1})-b(x_{j-1},t_{k+1})}{h}+(1-\theta_1)\frac{b(x_j,t_k)-b(x_{j-1},t_k)}{h}. \tag{12}$$

(b) $B(x_{j-1/2},t)h=\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_j}B(x,t)\mathrm{d}x=-\beta\int_{x_{j-1}}^{x_j}C(x,t)\frac{\partial s}{\partial x}\mathrm{d}x=-\beta\frac{\partial s}{\partial x}(x_{j-1/2},t)\int_{x_{j-1}}^{x_j}C(x,t)\mathrm{d}x$,

设 $W_j(t)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_j}C(x,t)\mathrm{d}x$,并用中心差商代替 $\dfrac{\partial s}{\partial x}(x_{j-1/2},t)$,则有

$$B(x_{j-1/2},t)h=-\beta W_j(t)\frac{s(x_j,t)-b(s_{j-1},t)}{h},$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}}B(x_{j-1/2},t)\mathrm{d}t=\theta_2 B(x_{j-1/2},t_{k+1})+(1-\theta_2)B(x_{j-1/2},t_k)=-\beta\theta_2 W_j^{k+1}\frac{s(x_j,t_{k+1})-s(x_{j-1},t_{k+1})}{h}-\beta(1-\theta_2)W_j^k\frac{s(x_j,t_k)-s(x_{j-1},t_k)}{h}, \tag{13}$$

其中 $\quad W_j^k=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_j}C(x,t_k)\mathrm{d}x.$

$$(\mathrm{c})\ \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1/2}}b(x,t_k)\mathrm{d}x=hb(x_j,t_k)=hb_j^k. \tag{14}$$

将方程(11)两边同时除以 τh 并应用方程(12) ~ (14),从而可以得到

$$\frac{b_j^{k+1}-b_j^k}{\tau}=\frac{1}{h^2}\{\theta_1(b_{j+1}^{k+1}-b_j^{k+1})+(1-\theta_1)(b_{j+1}^k-b_j^k)-\theta_1(b_j^{k+1}-b_{j-1}^{k+1})-(1-\theta_1)(b_j^k-b_{j-1}^k)\}+\frac{\beta}{h^2}\{-\theta_2 W_{j+1}^{k+1}(s_{j+1}^{k+1}-s_j^{k+1})-(1-\theta_2)W_{j+1}^k(s_{j+1}^k-s_j^k)\}+\frac{\beta}{h^2}\{\theta_2 W_j^{k+1}(s_j^{k+1}-s_{j-1}^{k+1})+(1-\theta_2)W_j^k(s_j^k-s_{j-1}^k)\}. \tag{15}$$

对于方程(8)同理可得

$$\frac{s_j^{k+1}-s_j^k}{\tau}=\xi\frac{s_{j+1}^k-2s_j^k+s_{j-1}^k}{h^2}-(s_j^k)^\alpha b_j^k,$$

令 $r_1=\xi_\tau/h^2$,即有

$$s_j^{k+1}=r_1 s_{j+1}^k+(1-2r_1)s_j^k+r_1 s_{j-1}^k-\tau(s_j^k)^\alpha b_j^k, \tag{16}$$

最后对于边界初始条件,同理可得到

$$b(x_j,0)=b_0(x_j),\frac{b_j^1-b_j^0}{\tau}=b_t(x_j),\ b_0^k=b_L^k=0, \tag{17}$$

$$s(x_j,0)=s_0(x_j),\frac{s_j^1-b_j^0}{\tau}=s_t(x_j),s_0^k=s_L^k=0. \tag{18}$$

综上所述可得方程(7) ~ (10)如下的显式差分格式

$$b_j^{k+1}=\frac{\tau}{h^2+2\theta_1\tau}\left\{\theta_1 b_{j+1}^{k+1}+\theta_1 b_{j-1}^{k+1}+\left[\frac{h^2}{\tau}-2(1-\theta_1)\right]b_j^k+(1-\theta_1)(b_{j+1}^k+b_{j-1}^k)\right\}+\frac{\beta\tau}{h^2+2\theta_1\tau}\{-\theta_2 W_{j+1}^{k+1}(s_{j+1}^{k+1}-s_j^{k+1})-(1-\theta_2)W_{j+1}^k(s_{j+1}^k-s_j^k)\}+\frac{\beta\tau}{h^2+2\theta_1\tau}\{\theta_2 W_j^{k+1}(s_j^{k+1}-$$

$$s_{j-1}^{k+1})+(1-\theta_2)W_j^k(s_j^k-s_{j-1}^k)\}. \tag{19}$$

$$s_j^{k+1}=r_1s_{j+1}^k+(1-2r_1)s_j^k+r_1s_{j-1}^k-\tau(s_j^k)^\alpha b_j^k, \tag{20}$$

$$b(x_j,0)=b_0(x_j), b_j^1=b_j^0+\tau b_t(x_j), b_0^k=b_L^k=0, \tag{21}$$

$$s(x_j,0)=s_0(x_j), s_j^1=b_j^0+\tau s_t(x_j), s_0^k=s_L^k=0. \tag{22}$$

2 有限差分法的稳定性

前面假设了 $C(x,t)=b(x,t)/s(x,t)$，在生物上细菌的密度与营养物的浓度构成指数函数的关系，且与时间无关，因此假定 $C(x,t)=\mathrm{e}^x$，并令 $\theta_1=\theta_2=1/2$，于是从方程(15)可得

$$W_j^k=\frac{1}{h}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{h}(\mathrm{e}^{x_j}-\mathrm{e}^{x_{j-1}}),$$

$$W_{j+1}^{k+1}=\frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{h}(\mathrm{e}^{x_{j+1}}-\mathrm{e}^{x_j}),$$

$$b_j^{k+1}-b_j^k=\frac{\tau}{2h^2}\left(b_{j+1}^{k+1}-b_j^{k+1}+b_{j+1}^k-b_j^k\right)+\frac{\tau}{2h^2}\left(-b_j^{k+1}+b_{j-1}^{k+1}-b_j^k+b_{j-1}^k\right)-\frac{\beta\tau}{2h^3}(\mathrm{e}^{x_{j+1}}-\mathrm{e}^{x_j})\left(s_{j+1}^{k+1}-s_j^{k+1}+s_{j+1}^k-s_j^k\right)+\frac{\beta\tau}{2h^3}(\mathrm{e}^{x_j}-\mathrm{e}^{x_{j-1}})\left(s_j^{k+1}-s_{j-1}^{k+1}+s_j^k-s_{j-1}^k\right).$$

根据中值定理可得

$$\frac{\mathrm{e}^{x_{j+1}}-\mathrm{e}^{x_j}}{h}=\mathrm{e}'(\xi),\quad \xi\in[x_j,\ x_{j+1}].$$

再令 $r_2=\tau/h^2$，于是可得

$$-\frac{1}{2}r_2b_{j+1}^{k+1}+(1+r_2)b_j^{k+1}-\frac{1}{2}r_2b_{j-1}^{k+1}-\frac{1}{2}r_2b_{j+1}^k-(1-r_2)b_j^k-\frac{1}{2}r_2b_{j-1}^k=-\frac{r_2\beta}{2}\mathrm{e}^{x_j}\left(s_{j+1}^{k+1}-2s_j^{k+1}\right)+s_{j-1}^{k+1}+s_{j+1}^k-2s_j^k+s_{j-1}^k. \tag{23}$$

记

$$b^k=[b_1^k,\ b_2^k,\cdots,b_{N-1}^k]',\ s^k=[s_1^k,\ s_2^k,\cdots,s_{N-1}^k]',$$

$$F^k=[(s_1^k)^\alpha b_1^k,\ (s_2^k)^\alpha b_2^k,\cdots,(s_{N-1}^k)^\alpha b_{N-1}^k]',$$

设 $\boldsymbol{I}$ 为 $N-1$ 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为 $N-1$ 阶对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\1&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}_{N-1},$$

结合边界条件为齐次的，并且根据方程(19)～(22)可得

$$s^{k+1}=[(1-2r_1)\boldsymbol{I}+r_1\boldsymbol{A}]s^k-\tau F^k,$$

$$\left[(1+r_2)\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r_2\boldsymbol{A}\right]b^{k+1}=\left[(1-r_2)\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r_2\boldsymbol{A}\right]b^k-\frac{r_2\beta}{2}\mathrm{e}^x(-2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(s^{k+1}+s^k),$$

即有

$$b^{k+1}=\left[(1+r_2)\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}r_2\boldsymbol{A}\right]^{-1}\left\{\left[(1-r_2)\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}r_2\boldsymbol{A}\right]b^k-\frac{r_2\beta}{2}\mathrm{e}^x(-2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(s^{k+1}+s^k)\right\}, \tag{24}$$

$$s^{k+1}=[(1-2r_1)\boldsymbol{I}+r_1\boldsymbol{A}]s^k-\tau F^k. \tag{25}$$

设 X 是定义在某个给定区域 B 上的具有某种性质的函数组成的一个 Banach 空间，对于 $u\in X$，可以定义范数为：

$$\|u\|_\infty=\max_{x\in D}\|u(x)\|,$$

或者
$$\|u\|_{L^2}=\sqrt{\int_D|u(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

如果将 u 在 x_j 离散化，得 $u=[u_1,u_2,\cdots,u_n]'$，则可定义相应的 Euclid 范数

$$\|u\|_2=\sqrt{\sum_{j=1}^n|u_j|^2},\ \|u\|_{2,h}=\sqrt{h\sum_{j=1}^n|u_j|^2},$$

$$\|u\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|u_j|.$$

定义 1[5] 对于差分格式 $\boldsymbol{AU}^{k+1}=\boldsymbol{BU}^k$ 或 $\boldsymbol{U}^{k+1}=\boldsymbol{QU}^k$，如果存在 $\tau_0>0$ 和常数 $k>0$，对一切 $\boldsymbol{U}^0\in X$，$0<\tau\leqslant\tau_0$ 和 $0\leqslant k\leqslant[T/\tau]-1$，成立

$$\|\boldsymbol{U}^{k+1}\|=\|\boldsymbol{Q}^{k+1}\boldsymbol{U}^0\|\leqslant k\|\boldsymbol{U}^0\|, \tag{26}$$

则称此差分格式在范数 $\|\cdot\|$ 的意义下，关于初值稳定.

定理 1[5] 差分格式 $\boldsymbol{U}^{k+1}=\boldsymbol{QU}^k$ 稳定的必要条件是存在与 τ 无关的常数 M，使得 $\rho(\boldsymbol{Q})\leqslant1+M\tau$. 其中 $\rho(\boldsymbol{Q})$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的谱半径.

定理 2[5] 若 $\boldsymbol{Q}$ 是正规矩阵(即 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{QQ}^*=\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{Q}^*$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 的共轭矩阵)，则定义 1 中的式(26)也是差分格式稳定的充分条件.

推论 1[5] 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的实系数有理数函数 $\boldsymbol{Q}=R(\boldsymbol{A})$，则差分格式稳定的充要条件是 $\rho(R(\boldsymbol{A}))\leqslant1+M\tau$.

定理 3 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 由前面给出，当 $r_1=\xi\tau/h^2\leqslant1/2$，$r_2=\tau/h^2>0$ 时，方程(7)～(10)显式差分格式(19)～(22)关于初值 $b_0(x)$，$s_0(x)$ 是稳定的.

证明 由给出的矩阵 $\boldsymbol{A}$，结合定理 1、定理 2 和推论，对于方程(24)，可得出 $\boldsymbol{Q}$ 为：$\boldsymbol{Q}=[(1+r_2)\boldsymbol{I}-r_2\boldsymbol{A}/2]^{-1}[(1-r_2)\boldsymbol{I}+r_2\boldsymbol{A}/2]$，其特征值为 $\lambda_j^Q=$

$$\frac{1-r_2+\frac{r_2}{2}\cdot 2\cos(j\pi h)}{1+r_2-\frac{r_2}{2}\cdot 2\cos(j\pi h)}=\frac{1-r_2[1-\cos(j\pi h)]}{1+r_2[1-\cos(j\pi h)]},$$

$(j=1,2,\cdots,N-1)$.

于是,对于任何的 r_2,都有 $|\lambda_j^Q|\leqslant 1$,因此,此差分格式是稳定的.

同样,对于方程(25),$\boldsymbol{Q}=[(1-2r_1)\boldsymbol{I}+r_1\boldsymbol{A}]$,其特征值为

$$\lambda_j^Q=(1-2r_1)+r_1\cdot 2\cos(j\pi h)=1-2r_1[1-\cos(j\pi h)]=$$
$$1-4r_1\sin^2(j\pi h/2),\ (j=1,2,\ldots,N-1),$$

要使 $|\lambda_j^Q|\leqslant 1+M$,即要

$$-1-M\leqslant 1-4r_1\sin^2(j\pi h/2)\leqslant 1+M,$$

化简为

$$4r_1\sin^2(j\pi h/2)\leqslant 2+M,(j=1,2,\ldots,N-1),$$

解得 $$r_1\leqslant 1/2.$$

即当 $\xi\tau/h^2\leqslant 1/2$ 时,此差分格式稳定.综上所述,当 $r_1=\xi\tau/h^2\leqslant 1/2$,$r_2=\tau/h^2>0$ 时,方程(7)~(10)显式差分格式方程(19)~(22)关于初值 $b_0(x)$,$s_0(x)$ 是稳定的.

3 数值例子

为了方便数值计算,在方程(7)~(8)中,令 $\xi=1$,$\alpha=1/2$,$\beta=2$,于是 $r=r_1=r_2=\tau/h^2$,再加上边界条件,可得

$$\frac{\partial b}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial x}-2\frac{b}{s}\frac{\partial s}{\partial x}\right),\quad x\in[0,1],\qquad(27)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-s^{\frac{1}{2}}b,\quad t\geqslant 0,\qquad(28)$$

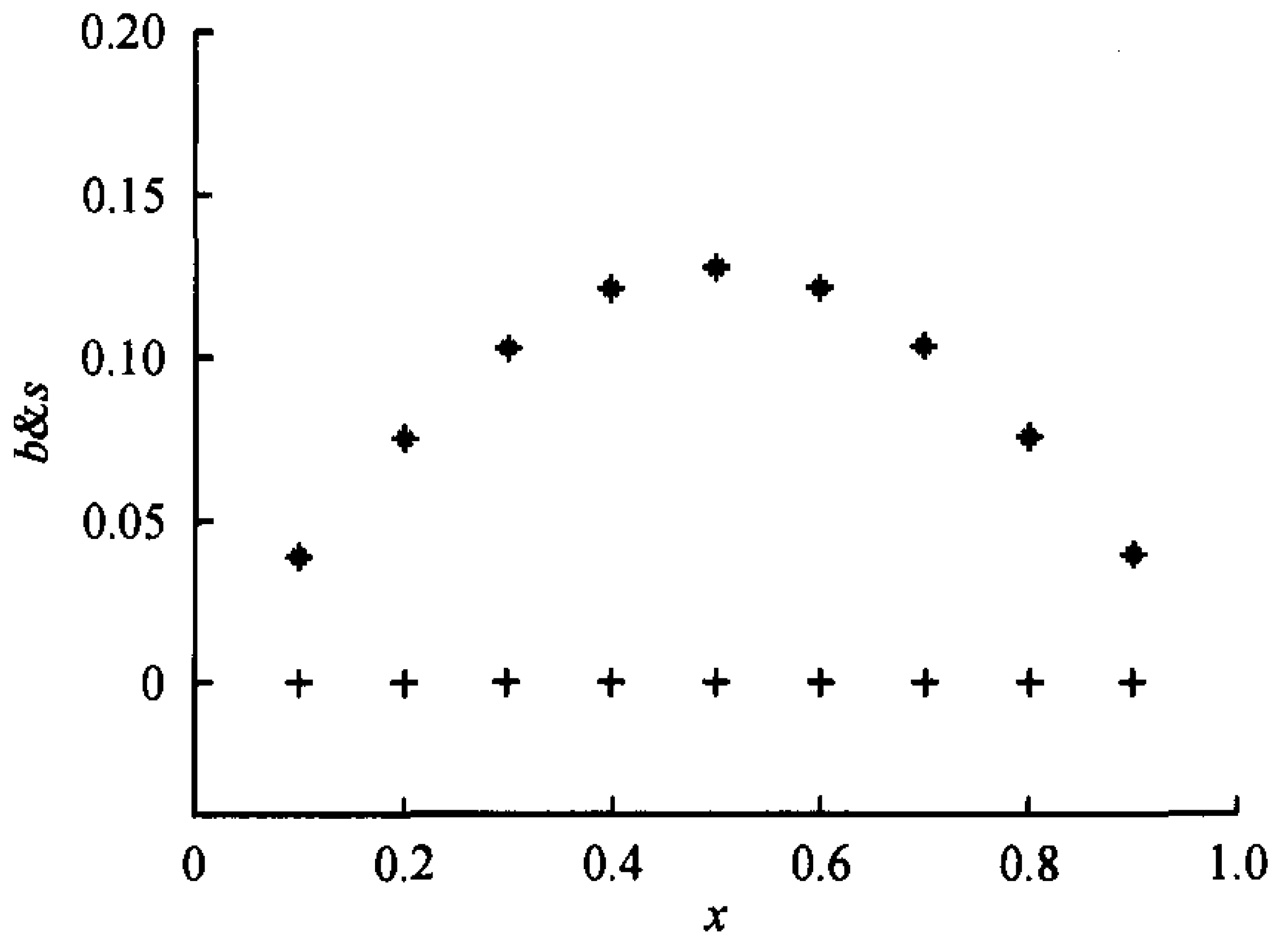
$$b(x,0)=\sin(\pi x),b(0,t)=b(1,t)=0,\quad(29)$$

$$s(x,0)=\sin(\pi x)/\mathrm{e}^x,s(0,t)=s(1,t)=0.\quad(30)$$

取空间步长和时间步长分别为 $h=0.1$,$\tau=0.0005$,则 $r=0.05$,现在计算 $t=0.5$ 时,$b(x,0.5)$,$s(x,0.5)$ 的数值解,利用方程(24)和(25)可计算得出数值结果.

在 $t=0.5$ 时刻,细菌密度与营养物浓度的关系如图1所示,从图1中可看出,所给的差分格式与实际模型相符.

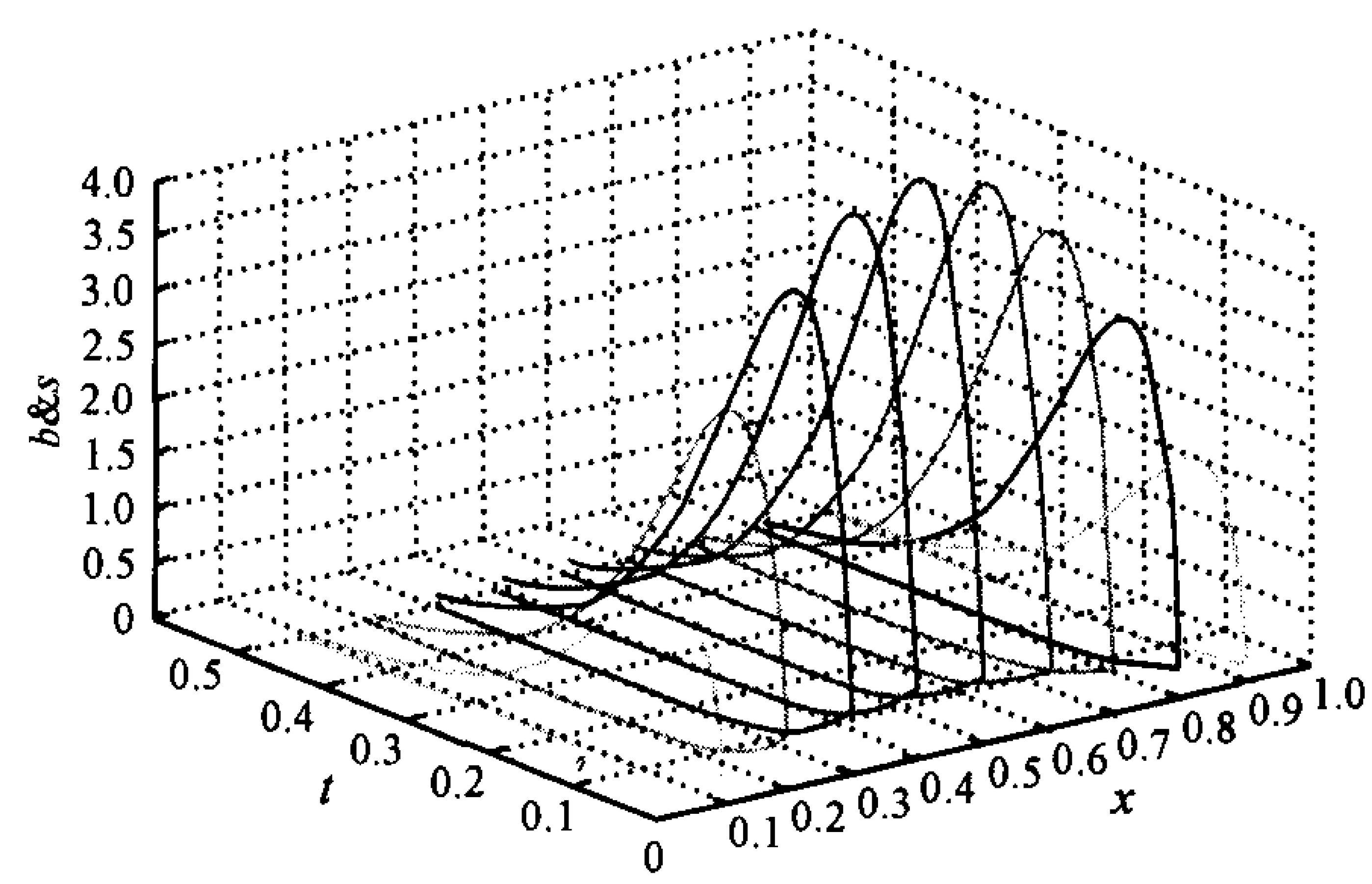
图2为在不同时刻(t)处于不同位置(x)的细菌密度 $b(x,t)$ 和营养物浓度 $s(x,t)$ 的函数值,如固定时间 t,则其截面表示的结果和图1表示的曲线非常相似,从而进一步验证了我们所给的差分格式能很好地模拟实际问题.



✦为细菌密度 $b(x,t)$,+为营养物浓度 $s(x,t)$

图1　在 $t=0.5$ 时刻细菌密度和营养物浓度函数值

Fig. 1　Germ density and nutrimental density functional value at $t=0.5$



$b(x,t)$为细菌密度,$s(x,t)$为营养物浓度

图2　细菌密度函数和营养物浓度函数图

Fig. 2　Germ density function and nutrimental density function

参考文献:

[1] KELLER E F,SEL A. Traveling bands of chemotaxis bacteria:a theoretical analysis[J]. Theoret Bio,1971(30):235-248.

[2] KELLER E F,ODELL G M. Necessary and sufficient conditions for chemotaxis bands[J]. Math Biosci,1975(27):309-317.

[3] 黎勇.一类趋化性生物模型行波解的存在性[J].应用数学学报,2004,27(1):123-131.

[4] 孔祥红,刘迎东.一类趋化性生物模型行波解的存在性与正则性[J].数学的实践与认识,2008,38(5):141-147.

[5] 李瑞遐.微分方程数值解法[M].上海:华东理工大学出版社,2005:105-107.

[6] YE Qi-xiao,LI Zheng-yuan. Introduction to Reaction and Diffusion[M]. Beijing:Science Press,1990.

【责任编辑　李晓卉】