

Laplacian 谱半径和阶数相等的 c 圈图

刘木伙, 李倩, 文斌

(华南农业大学理学院, 广东广州 510642)

摘要: 设 G 是 1 个无向的简单图, ν 表示 G 的阶数, $m_c(\nu)$ 表示 ν 作为 G 的 Laplacian 矩阵的特征值的重数. 得到了 Laplacian 谱半径等于阶数的所有 c 圈图, 研究了 c 与 $m_c(\nu)$ 之间的关系. 给出了当 G 是森林、单圈图、双圈图、三圈图、四圈图时 $m_c(\nu)$ 的取值范围, 并确定了 $m_c(\nu) (\geq 1)$ 在该取值范围内取不同值时的所有图.

关键词: Laplacian 矩阵; 谱半径; 单圈图; 双圈图

中图分类号: O157.12

文献标识码: A

文章编号: 1001-411X(2010)01-0112-03

The c Cyclic Graph Whose Largest Eigenvalue of Its Laplacian Matrix Equals Its Order

LIU Mu-huo, LI Qian, WEN Bin

(College of Sciences, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: G is a simple undirected graph of order ν . $m_c(\nu)$ denotes the multiplicity of ν being an eigenvalue of Laplacian matrix. In this paper, the c cyclic graph whose largest eigenvalue of its Laplacian matrix equals ν is obtained, and the relation of c and $m_c(\nu)$ is studied. Moreover, the range of $m_c(\nu)$ is obtained when G is a forest, a unicyclic graph, a bicyclic graph, a tricyclic graph and a tetracyclic graph, respectively, and the graph is determined when $m_c(\nu) (\geq 1)$ takes different value in its range.

Key words: Laplacian matrix; spectral radius; unicyclic graphs; bicyclic graphs

设 $G = (V(G), E(G))$ 为无向的简单图, ν 和 ε 分别表示 G 的阶数和边数, 即 $\nu = |V(G)|$, $\varepsilon = |E(G)|$. $D(G) = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_\nu))$ 和 $A(G)$ 分别表示图 G 的度对角矩阵和邻接矩阵, $L(G) = D(G) - A(G)$ 称为图 G 的 Laplacian 矩阵. 易见 $L(G)$ 是实对称、半正定的且有特征值 0. 设 $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_\nu(G) = 0$ 为 $L(G)$ 的谱, 也称为图 G 的 Laplacian 谱. 特别的, 称 $\lambda_1(G)$ 为 $L(G)$ 的谱半径, 也称为图 G 的 Laplacian 谱半径. $m_c(\nu)$ 表示 ν 作为 G 的 Laplacian 矩阵的特征值的重数, 显然 $0 \leq m_c(\nu) \leq \nu - 1$. 如果 $c = \varepsilon - \nu + p$, 其中 p 表示 G 的连通分支的个数, 则称 G 是 1 个 c 圈图. 若 G 的每个连通分支都是 1 棵树, 则称 G 为 1 个森林. 由圈数 c 的

定义可知 $c(G) = 0$ 当且仅当 G 是 1 个森林. 以下, 分别用 C_n, P_n, K_n 表示 n 阶的圈、路、完全图.

图的 Laplacian 矩阵的谱不但有着重要的图论意义, 而且在物理、化学、生物和计算机网络中有着广泛的应用, 所以引起了学者们的极大兴趣^[1-3]. 对于图的 Laplacian 谱的研究一般有 2 个方向, 第 1 种是确定给定的图的 Laplacian 谱, 第 2 种是由图的 Laplacian 谱去确定对应的图. 对于后者研究较少, 相关结果见文献[1-2]. 本文得到了 Laplacian 谱半径等于阶数的所有 c 圈图, 研究了 c 与 $m_c(\nu)$ 之间的关系. 同时给出了当 G 是森林、单圈图、双圈图、三圈图、四圈图时 $m_c(\nu)$ 的取值范围, 并确定了 $m_c(\nu) (\geq 1)$ 在该取值范围内取不同值时的所有图.

收稿日期: 2007-11-12

作者简介: 刘木伙(1981—), 男, 助教, E-mail: liumuhuo@scau.edu.cn

基金项目: 广东省自然科学基金(53000084); 华南农业大学校长基金(4900-K08225)

1 一些引理

如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 H 是 G 的子图. 特别的, 如果 H 是 G 的子图, 且 $V(H) = V(G)$, 则 H 称为 G 的生成子图. 如果 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \emptyset (i \neq j)$, 且对任意的 $u \in V_i$, $v \in V_j$, $(u, v) \in E(G)$ 当且仅当 $i \neq j$, 则称 G 为完全 k 部图. 此时记为 $G = K_{a_1, \dots, a_k}$, 其中 $|V_i| = a_i, 1 \leq i \leq k$.

引理 1^[1] 当 $1 \leq k \leq \nu - 1, m_c(\nu) \geq k$ 当且仅当 G 有 1 个完全 $k+1$ 部的生成子图.

由引理 1 可知, 如果 $\lambda_1(G) = \nu$, 则 G 有 1 个完全二部的生成子图, 故 G 连通. 于是, 当 G 是 1 个满足 $\lambda_1(G) = \nu$ 的 c 圈图时有

$$\varepsilon = \nu + c - 1. \quad (1)$$

设 G_1 和 G_2 为 2 个图, 将 G_1 的每一个顶点和 G_2 的每一个顶点用边相连, 所得的图称为 G_1 和 G_2 的联, 记为 $G_1 \vee G_2$. tK_1 表示 t 个顶点组成的没有边的图. 1 个星图 (记为 $K_{1, n-1}$) 是指 $K_{1, n-1} = K_1 \vee ((n-1)K_1)$.

引理 2^[3] 若 G 是 1 棵树, 则 $\lambda_1(G) = \nu$ 当且仅当 $G \cong K_{1, \nu-1}$.

符号 $G + te$ 表示由 G 任意地添加 t 条边所得到的图类. $\lceil t \rceil$ 表示不小于 t 的最小整数, $\lfloor t \rfloor$ 表示不大于 t 的最大整数.

2 主要结果

定理 1 若 G 是 1 个 c 圈图, 则 $\lambda_1(G) = \nu$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = c, \nu \geq \lceil (3 + \sqrt{8c+1})/2 \rceil$ 或者 $G \cong K_{a,b} + [c - (a-1)(b-1)]e$, 其中 $\lceil (3 + \sqrt{8c+1})/2 \rceil \leq \nu \leq c+3, 2 \leq a \leq \lfloor \nu/2 \rfloor, (a-1)(b-1) \leq c$ 且 $\nu = a+b$.

证明 充分性: 只须注意此时 G 有 1 个完全二部生成子图, 由引理 1 可知 $\lambda_1(G) = \nu$.

必要性: 若 $\lambda_1(G) = \nu$, 由式(1)可知 $\nu + c - 1 = \varepsilon \leq \nu(\nu - 1)/2$, 故 $\nu \geq \lceil (3 + \sqrt{8c+1})/2 \rceil$. 由于 $\lambda_1(G) = \nu$, 由引理 1 可知 $G = G_1 \vee G_2$. 令 $\nu(G_1) = a, \nu(G_2) = b$, 显然 $\nu = a + b$. 不妨设 $b \geq a \geq 1$, 则 $1 \leq a \leq \lfloor \nu/2 \rfloor$.

当 $a=1$, 此时 $G = K_1 \vee H$. 由式(1)可知 $|E(H)| = c$ 成立.

若 $a \geq 2$, 由 $b \geq a \geq 2$, 得 $\varepsilon > \nu - 1$. 于是 $c \geq 1$, 否则与式(1)矛盾. 又由式(1)有 $a(\nu - a) \leq \varepsilon = \nu +$

$c - 1$, 即 $\nu \leq c/(a-1) + a + 1$. 注意到函数 $f(x) = c/x + x$ 在 $[1, \sqrt{c}]$ 上严格递减, 在 $[\sqrt{c}, \infty]$ 上严格递增. 故当 $2 \leq a \leq \lfloor \nu/2 \rfloor$ 时, $\nu \leq \max\{c+3, c/(\lfloor \nu/2 \rfloor - 1) + \lfloor \nu/2 \rfloor + 1\}$. 于是 $\nu \leq \max\{c+3, 2 + \lfloor \sqrt{4c+1} \rfloor\}$. 当 $c=1$ 时, $c+3 = 2 + \lfloor \sqrt{4c+1} \rfloor$. 当 $c \geq 2$ 时, $c+3 \geq 2 + \lfloor \sqrt{4c+1} \rfloor$. 从而, $\nu \leq c+3$.

又因为 G 是 1 个 c 圈图, 且 $\nu = a + b$, 由式(1)有 $\nu + c - 1 = \varepsilon(G_1 \vee G_2) \geq ab$, 故 $G \cong K_{a,b} + [c - (a-1)(b-1)]e$.

文献[3]中给出了所有 Laplacian 谱半径等于阶数的树, 即给出了 $c=0, \lambda_1 = \nu$ 的所有图. 文献[1]中确定了 Laplacian 谱半径等于阶数的单圈图、双圈图、三圈图, 即给出了当 $c=1, 2, 3$ 时, $\lambda_1 = \nu$ 的所有图. 本文将给出 $c=4, 5$ 时 $\lambda_1 = \nu$ 的所有图, $c=6, 7 \dots$ 不再一一列举.

推论 1 若 G 是 1 个四圈图, 则 $\lambda_1(G) = \nu$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 4, \nu \geq 5$ 或者 $G \cong K_{2,4} + e$ 或者 $G \cong K_{3,3}$ 或者 $G \cong K_{2,5}$.

推论 2 若 G 是 1 个五圈图, 则 $\lambda_1(G) = \nu$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 5, \nu \geq 5$ 或者 $G \cong K_{2,4} + 2e$ 或者 $G \cong K_{3,3} + e$ 或者 $G \cong K_{2,5} + e$ 或者 $G \cong K_{2,6}$.

下面研究 c 与 $m_c(\nu)$ 之间的关系.

定理 2 设 G 是 1 个 c 圈图. 若 $m_c(\nu) = k$, 则

$$c \geq k(k-1)/2. \quad (2)$$

当 $c \geq 1$ 时, 不等式(2)中等号成立当且仅当 $G \cong K_{k+1}$.

证明 当 $k=0$ 时, 式(2)显然成立. 当 $k \geq 1$ 时, 由引理 1 可知 G 连通且至少有 1 个 K_{k+1} 作为子图, 由式(1)有

$$\nu + c - 1 = \varepsilon \geq k(k+1)/2 + \nu - 1 - k,$$

即

$$c \geq k(k-1)/2.$$

故式(2)成立.

当 $c \geq 1$ 时, 若 $G \cong K_{k+1}$, 则 $m_c(k+1) = k$. 由式(1)可知 $(k+1) + c - 1 = \varepsilon = k(k+1)/2$, 故 $c = k(k-1)/2$ 成立. 反之, 若 $c = k(k-1)/2$, 由于 $c \geq 1$, 故 $k \geq 2$. 由引理 1 可知 G 有 1 个完全 $k+1$ 部的生成子图 $K_{a_1, \dots, a_{k+1}}$, 则对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, 都有 $a_i = 1$. 否则, 若存在 $a_i \geq 2$, 则 $\nu + c - 1 = \varepsilon > k(k+1)/2 + \nu - 1 - k$, 即 $c > k(k-1)/2$, 矛盾. 从而, $G \cong K_{k+1}$.

定理 3 若 G 是 1 个森林, 则 $0 \leq m_c(\nu) \leq 1$, 且

$m_G(\nu) = 1$ 当且仅当 $G \cong K_{1,\nu-1}$.

证明 由定理2可知, $0 \leq m_G(\nu) \leq 1$. 若 $m_G(\nu) = 1$, 则由引理1可知 G 连通, 即 G 为1棵树. 由引理2可知 $G \cong K_{1,\nu-1}$. 反之, 当 $G \cong K_{1,\nu-1}$, 由于 $K_{1,\nu-1}$ 的 Laplacian 谱为 $\{\nu, 1, 1, \dots, 1, 0\}$, 故 $m_G(\nu) = 1$.

定理4 若 G 是1个单圈图, 则 $0 \leq m_G(\nu) \leq 2$, 且

① $m_G(\nu) = 1$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 1, \nu \geq 4$ 或者 $G \cong C_4$;

② $m_G(\nu) = 2$ 当且仅当 $G \cong K_3$.

证明 由定理2可知, $0 \leq m_G(\nu) \leq 2$. 若 $m_G(\nu) = 1$, 则由定理1可知 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 1, \nu \geq 3$ 或者 $G \cong C_4$. 反之, 当 $G \cong C_4$, 由于 C_4 的 Laplacian 谱为 $\{4, 2, 2, 0\}$, 故 $m_G(\nu) = 1$ 成立. 若 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 1, \nu \geq 4$, 此时 G 有1个完全二部的生成子图, 但没有完全三部的生成子图, 由引理1可知 $m_G(\nu) = 1$ 成立. 注意当 $m_G(\nu) = 2, c = 1$ 时, 式(2)取等号. 结合定理2和上述讨论可知①, ②成立.

定理5 若 G 是1个双圈图, 则 $0 \leq m_G(\nu) \leq 2$, 且

① $m_G(\nu) = 1$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 2, \nu \geq 5$ 或者 $G \cong K_{2,3}$;

② $m_G(\nu) = 2$ 当且仅当 $G \cong K_2 \vee (2K_1)$.

证明 由定理2可知, $0 \leq m_G(\nu) \leq 2$. 当 $1 \leq m_G(\nu) \leq 2$, 由定理1可知 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 2, \nu \geq 5$ 或者 $G \cong K_2 \vee (2K_1)$ 或者 $G \cong K_{2,3}$. 直接计算可得 $K_2 \vee (2K_1)$ 的 Laplacian 谱为 $\{4, 4, 2, 0\}$, $K_{2,3}$ 的 Laplacian 谱为 $\{5, 3, 2, 2, 0\}$. 而当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 2, \nu \geq 5$ 时, G 有完全二部的生成子图但没有完全三部的生成子图, 由引理1可知 $m_G(\nu) = 1$ 成立. 综上所述, 结论成立.

定理6 若 G 是1个三圈图, 则 $0 \leq m_G(\nu) \leq 3$, 且

① $m_G(\nu) = 1$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 3, \nu \geq 6$ 或者 $G \cong K_1 \vee P_4$ 或者 $G \cong K_1 \vee (K_3 \cup K_1)$ 或者 $G \cong (2K_1) \vee (K_1 \cup K_2)$ 或者 $G \cong K_{2,4}$;

② $m_G(\nu) = 2$ 当且仅当 $G \cong K_2 \vee (3K_1)$;

③ $m_G(\nu) = 3$ 当且仅当 $G \cong K_4$.

证明 由定理2可知 $0 \leq m_G(\nu) \leq 3$. 当 $1 \leq m_G(\nu) \leq 3$, 由定理1可知 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 3, \nu \geq 4$ 或者 $G \cong K_{2,3} + e$ 或者 $G \cong K_{2,4}$. 等价的当 $1 \leq m_G(\nu) \leq 3$, $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 3, \nu \geq 6$ 或者 $G \cong K_1 \vee P_4$ 或者 $G \cong K_1 \vee (K_3 \cup K_1)$ 或者 $G \cong (2K_1) \vee (K_1 \cup K_2)$ 或者 $G \cong K_2 \vee (3K_1)$ 或者 $G \cong K_{2,4}$ 或者 $G \cong K_4$. 直接计算可得 $K_1 \vee P_4$ 的 Laplacian 谱为 $\{5, 4, 4, 1, 3, 1, 59, 0\}$, $(2K_1) \vee (K_1 \cup K_2)$ 的 Laplacian 谱为 $\{5, 4, 3, 2,$

$0\}$, $K_1 \vee (K_3 \cup K_1)$ 的 Laplacian 谱为 $\{5, 4, 4, 1, 0\}$, $K_2 \vee (3K_1)$ 的 Laplacian 谱为 $\{5, 5, 2, 2, 0\}$, $K_{2,4}$ 的 Laplacian 谱为 $\{6, 4, 2, 2, 2, 0\}$, K_4 的 Laplacian 谱为 $\{4, 4, 4, 0\}$. 而当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 3, \nu \geq 6$ 时, G 含有完全二部的生成子图, 但不含有完全三部的生成子图, 由引理1可知 $m_G(\nu) = 1$ 成立. 综合上述讨论, 结论成立.

类似的可以得到

定理7 若 G 是1个四圈图, 则 $0 \leq m_G(\nu) \leq 3$, 且

① $m_G(\nu) = 1$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = 4, \nu \geq 7$ 或者 $G \cong K_1 \vee (K_1 \cup (K_1 \vee (K_1 \cup K_2)))$ 或者 $G \cong K_1 \vee (K_2 \cup K_3)$ 或者 $G \cong K_1 \vee (K_1 \cup C_4)$ 或者 $G \cong K_1 \vee P_5$ 或者 $G \cong (2K_1) \vee ((2K_1) \cup K_2)$ 或者 $G \cong K_{3,3}$ 或者 $G \cong K_{2,5}$ 或者 $G \cong K_1 \vee H_1$, 其中 H_1 为 P_4 外添加一顶点使之与 P_4 的1个二度点相连所得的图;

② $m_G(\nu) = 2$ 当且仅当 $G \cong C_4 \vee K_1$ 或者 $G \cong K_2 \vee (K_1 \cup K_2)$ 或者 $G \cong K_2 \vee (4K_1)$;

③ 不存在四圈图, 使得 $m_G(\nu) = 3$.

对于一般的 c 圈图有

定理8 若 G 是1个 c 圈图, 则

$$0 \leq m_G(\nu) \leq \lfloor (1 + \sqrt{8c+1})/2 \rfloor.$$

当 $\nu \geq c+4$ 时, $m_G(\nu) = 1$ 当且仅当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = c$.

证明 由定理2可知, $0 \leq m_G(\nu) \leq \lfloor (1 + \sqrt{8c+1})/2 \rfloor$ 成立. 当 $\nu \geq c+4$ 时, 由定理1可知 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = c$ 成立. 反之, 当 $G \cong K_1 \vee H$, 其中 $|E(H)| = c$, 则 G 含有完全二部的生成子图, 但不含有完全三部的生成子图, 由引理1可知 $m_G(\nu) = 1$.

由定理1和定理8可得

推论3 设 $k \in \{2, 3, \dots, \lfloor (1 + \sqrt{8c+1})/2 \rfloor\}$, 则最多只有有限个 c 圈图 G 使得 $m_G(\nu) = k$.

参考文献:

- [1] LIU Bo-lian, CHEN Zhi-bo, LIU Mu-huo. On graphs with largest Laplacian index [J]. Cze Math J, 2008, 58(4): 949-960.
- [2] CVETKOVIC D M, DOOB M, SACHS H. Spectra of graphs-theory and applications[M]. Berlin: V E B Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980.
- [3] GUTMAN I. The star is the tree with greatest Laplacian eigenvalue[J]. Kragujevac J Math, 2002, 24: 61-65.

【责任编辑 李晓卉】