第 32 卷 第 2 期 华南农业大学学报 Vol. 32, No. 2
2011 年 4 月 Journal of South China Agricultural University Apr. 2011

分担小函数的亚纯函数的唯一性

曾翠萍[1,2], 杨德贵[1]
(1 华南农业大学 理学院,广东 广州 510642;2 广东金融学院 应用数学系,广东 广州 510521)

摘要:应用日本学者 K. Yamanoi 的最新研究成果,将杨乐早期得到的 2 个涉及低重分担值的唯一性结果推广到低重分担小函数的情形.

关键词:亚纯函数; 小函数; 唯一性
中图分类号:O174. 52 **文献标识码**:A **文章编号**:1001-411X(2011)02-0107-02

Uniqueness of Meromorphic Functions Which Share Small Functions

ZENG Cui-ping[1,2], YANG De-gui[1]
(1 College of Sciences, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China,
2 Department of Mathematics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521, China)

Abstract: Two uniqueness theorems of meromorphic functions share small functions proved. New result belong to K. Yamanoi and the theorems given by L. Yang in 1964.

Key words: meromorphic function; small function; uniqueness.

1 引言及主要结果

设$f(z)$为复平面内的非常数亚纯函数,本文将使用 Nevanlinna 分布理论中常用的记号及术语(参见文献[1,2]),如

$T(r,f), m(r,f), N(r,f), \overline{N}(r,f), S(r,f)\cdots$,

其中,$S(r,f)=o(T(r,f))$, $r\to\infty$,可能除去一个线性测度为有穷的 r 值集.

设 k 为正整数. $N_{k)}\left(r,\dfrac{1}{f}\right)$表示 f 的重数不超过 k 的零点的计数函数; $N_{(k}\left(r,\dfrac{1}{f}\right)$表示 f 的重数大于 k 的零点的计数函数. 我们用 $\overline{N}_{k)}\left(r,\dfrac{1}{f}\right)$和 $\overline{N}_{(k}\left(r,\dfrac{1}{f}\right)$分别表示相应的精简计数函数. 设$f(z)$和 $a(z)$为复平面内的亚纯函数,如果 $T(r,a)=S(r,f)$,则称 $a(z)$为$f(z)$的小函数.

1964 年,杨乐[3]证明了以下定理:

定理 A 设$f(z)$, $g(z)$为非常数亚纯函数,k 为正整数,$q=5+\left[\dfrac{2}{k}\right]$, a_j $(j=1,2,\cdots,q)$为判别的复数. 若 $\overline{E}_{k)}(a_j,f)=\overline{E}_{k)}(a_j,g)$,则$f\equiv g$.

定理 B 设$f(z)$, $g(z)$为非常数亚纯函数,a_j $(j=1,2,\cdots,5)$为判别的复数. 若 $\overline{E}_{3)}(a_j,f)=\overline{E}_{3)}(a_j,g)$ $(j=1,2,3)$ 且 $\overline{E}_{2)}(a_j,f)=\overline{E}_{2)}(a_j,g)$ $(j=4,5)$,则$f\equiv g$.

本文将定理 A 和定理 B 推广到分担小函数的情形,证明了

定理 1 设$f(z)$, $g(z)$为非常数亚纯函数,k 为正整数,$q=5+\left[\dfrac{2}{k}\right]$, $a_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,q)$为$f(z)$与 $g(z)$判别的小函数. 若 $\overline{E}_{k)}(a_j(z),f)=\overline{E}_{k)}(a_j(z),g)$,则$f\equiv g$.

定理 2 设$f(z)$, $g(z)$为非常数亚纯函数,$a_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,5)$为$f(z)$与 $g(z)$判别的小函数. 若 $\overline{E}_{3)}(a_j(z),f)=\overline{E}_{3)}(a_j(z),g)$ $(j=1,2,3)$,且 $\overline{E}_{2)}(a_j(z),f)=$

收稿日期:2009-11-12
作者简介:曾翠萍(1972—),女,博士;通信作者:杨德贵(1967—),男,教授,博士,E-mail:dyang@ scau. edu. cn
基金项目:国家自然科学基金(10771076);广东省科技计划项目(2008B080701005)

$\overline{E}_{2)}(a_j(z),g)(j=4,5)$,则$f\equiv g$.

2 引理

为了证明定理1 和定理2,我们需要下列引理.

引理1 设$f(z)$为非常数亚纯函数,$a(z)$为$f(z)$的小函数,k 为正整数,则有

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\leqslant\frac{k}{k+1}\overline{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\frac{k}{k+1}N\left(r,\frac{1}{f-a}\right).$$

证明

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\overline{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=$$
$$\frac{k}{k+1}\overline{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\frac{1}{k+1}\overline{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\overline{N}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\leqslant$$
$$\frac{k}{k+1}\overline{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\frac{1}{k+1}N\left(r,\frac{1}{f-a}\right).$$

下面的引理属于日本学者 Yamanoi[4]. 此引理在本文的证明中起了十分关键的作用.

引理2 设$f(z)$为非常数亚纯函数,$a_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,q)$是$f(z)$的 q 个判别的小函数. 则对于任意$\varepsilon>0$ 有

$$(q-2-\varepsilon)T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+O(1),\quad(r\notin E_1),$$

其中集合 $E_1\subset(1,+\infty)$ 且满足$\int_{E_1}d\log\log r<+\infty$.

3 定理1 和定理2 的证明

定理1 的证明 假设$f\not\equiv g$,由引理1 及引理2 得

$$(q-2-\varepsilon)T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+O(1)\leqslant$$
$$\frac{k}{k+1}\sum_{j=1}^{q}\overline{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+O(1)\leqslant$$
$$\frac{k}{k+1}N\left(\frac{1}{f-g}\right)+\frac{q}{k+1}T(r,f)+O(1)\leqslant$$
$$\frac{k}{k+1}[T(r,f)+T(r,g)]+\frac{q}{k+1}T(r,f)+O(1).$$

取 ε 足够小,则有

$$(q-2)T(r,f)\leqslant\frac{k}{k+1}[T(r,f)+T(r,g)]+\frac{q}{k+1}T(r,f)+S(r,f),\tag{1}$$

同理,

$$(q-2)T(r,g)\leqslant\frac{k}{k+1}[T(r,f)+T(r,g)]+\frac{q}{k+1}T(r,g)+S(r,g).\tag{2}$$

由式(1)和式(2)得

$$(kq-4k-2)[T(r,f)+T(r,g)]\leqslant S(r,f)+S(r,g),$$

由于 $q=5+\left[\frac{2}{k}\right]$,故 $kq-4k-2=k-2+k\cdot\left[\frac{2}{k}\right]>0$,矛盾. 所以$f\equiv g$. 定理1 证毕.

定理2 的证明 假设$f\not\equiv g$,由引理1 及引理2 有

$$3T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{5}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{3}\overline{N}_{3)}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+$$
$$\frac{2}{3}\sum_{j=4}^{5}\overline{N}_{2)}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+\frac{1}{3}\sum_{j=4}^{5}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$\frac{3}{4}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{N}_{3)}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+\sum_{j=4}^{5}\overline{N}_{2)}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)\right]+$$
$$\frac{3}{4}T(r,f)+\frac{2}{3}T(r,f)+S(r,f)\leqslant$$
$$\frac{3}{4}N\left(r,\frac{1}{f-g}\right)+\frac{17}{12}T(r,f)+S(r,f)\leqslant$$
$$\frac{3}{4}[T(r,f)+T(r,g)]+\frac{17}{12}T(r,f)+S(r,f).$$

整理得

$$\frac{9}{12}T(r,f)\leqslant\frac{3}{4}[T(r,f)+T(r,g)]+S(r,f),\tag{3}$$

同理得

$$\frac{9}{12}T(r,g)\leqslant\frac{3}{4}[T(r,f)+T(r,g)]+S(r,f),\tag{4}$$

由式(3)和式(4)得

$$\frac{1}{12}[T(r,f)+T(r,g)]\leqslant S(r,f)+S(r,g),$$

矛盾. 所以$f\equiv g$. 定理2 证毕.

参考文献:

[1] YANG Le. Value distribution theory[M]. Berlin: Springer-Verlag,1993.

[2] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.

[3] 杨乐. 亚纯函数及函数组合的重值[J]. 数学学报,1964,14:428-437.

[4] YAMANOI K. The second main theorem for small functions and related problems[J]. Acta Math,2004(192):225-299.

【责任编辑 李晓卉】