第 32 卷 第 4 期
2011 年 10 月

华南农业大学学报
Journal of South China Agricultural University

Vol. 32, No. 4
Oct. 2011

关于几类子范畴的同调有限性质

邓芳芳
(广东广播电视大学,广东 广州 510091)

摘要:通过引入左正交维数,证明了与一个余倾斜模左正交的有限生成模范畴是函子有限的.

关键词:余倾斜模; 左正交维数; 同调有限子范畴; 可解
中图分类号:O154.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001-411X(2011)04-0113-03

On Homologically Finite Property of Some Subcategories

DENG Fang-fang
(Guangdong Radio & TV University, Guangzhou 510091, China)

Abstract: The category consisting of modules which are left orthogonal with a cotilting module was proved to be functorially finite by introducing left orthogonal dimension.

Key words: cotilting modules; left orthogonal dimension; homologically finite subcategories; resolving

同调有限子模范畴是代数表示论中重要的研究对象. 设 R 为带有单位元的结合环,由文献[1]可知,对任意 R 模 M,$\mathrm{Add}_R M$ 是 $\mathrm{Mod}\ R$ 的反变有限子范畴,$\mathrm{Prod}_R\ M$ 是 $\mathrm{Mod}\ R$ 的正变有限子范畴. $M^{\perp}$ 是 $\mathrm{Mod}\ R$ 的正变有限子范畴,而 ${}^{\perp}M$ 是否为 $\mathrm{Mod}\ R$ 的反变有限子范畴仍是一个公开问题,但当 M 是余倾斜模时,${}^{\perp}M$ 是 $\mathrm{Mod}\ R$ 的反变有限子范畴. 若 Λ 是一个 artin 代数,由文献[2]可知,对任意有限生成模 M,$\mathrm{add}_\Lambda M$ 是 $\mathrm{mod}\Lambda$ 的函子有限子范畴. 在文献[3]中,笔者定义了左正交维数,本文通过引入左正交维数,进而证明了当 $M \in \mathrm{mod}\Lambda$ 是一个余倾斜模时,${}^{\perp}M$ 是反变有限的,进而可知它是函子有限的.

1 定义与记号

本文中 R 表示带有单位元的结合环,Λ 为 artin 代数. $\mathrm{Mod}\ R$ 表示由全体左 R 模组成的范畴,$\mathrm{mod}\Lambda$ 表示有限生成左 Λ 模组成的范畴. 用 $\mathrm{l.id}_\Lambda(M)$ 表示 M 的左内射维数.

定义 1.1[3]　设 $\xi \supset \mathcal{D}$ 是 $\mathrm{mod}\Lambda$ 的 2 个子模范畴,且设 $C \in \xi$, $D \in \mathcal{D}$,如果对任意 $X \in \mathcal{D}$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, D) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, C) \to 0$ 是正合的,则称态射 $D \to C$ 是 C 的一个右 $\mathcal{D}$-逼近. 如果 ξ 的每一个模都有一个右 $\mathcal{D}$-逼近,则称 $\mathcal{D}$ 在 ξ 上反变有限,或称 $\mathcal{D}$ 为 ξ 的一个反变有限子范畴. 对偶地, 如果对任意 $X \in \mathcal{D}$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(D, X) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C, X) \to 0$ 是正合的,则称态射 $C \to D$ 是 C 的一个左 $\mathcal{D}$-逼近. 如果 ξ 的每一个模都有一个左 $\mathcal{D}$-逼近,则称 $\mathcal{D}$ 在 ξ 上正变有限,或称 $\mathcal{D}$ 为 ξ 的一个正变有限子范畴. 如果 ξ 的每一个模既有右 $\mathcal{D}$-逼近又有左 $\mathcal{D}$-逼近,则称 $\mathcal{D}$ 在 ξ 上函子有限,或称 $\mathcal{D}$ 为 ξ 的一个函子有限子范畴. 反变有限子范畴、正变有限子范畴、函子有限子范畴统称为同调有限子范畴.

定义 1.2[2]　设 $\omega \in \mathrm{mod}\Lambda$,如果对任意 $i \geqslant 1$, $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\omega, \omega) = 0$,则称 ω 为自正交模. 一个自正交模 ω 称为余倾斜模,如果 $\mathrm{l.id}_\Lambda(\omega) < \infty$ 且所有内射模都在 $\widehat{\mathrm{add}_\Lambda \omega}$ 中,这里 $\widehat{\mathrm{add}_\Lambda \omega} = \left\{ C \in \mathrm{mod}\Lambda \;\middle|\; \text{存在正合列 } 0 \to X_n \to \cdots \to X_0 \to C \to 0, X_i \in \mathrm{add}_\Lambda \omega \right\}$.

设 $\omega \in \mathrm{mod}\Lambda$ 是一个自正交模,${}^{\perp}\omega = \left\{ X \in \mathrm{mod}\Lambda \;\middle|\; \mathrm{Ext}^i_\Lambda(X, \omega) = 0, \forall i \geqslant 1 \right\}$,称 $\mathrm{mod}\Lambda$ 中的正合列 $\cdots \to X_n \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$ 为 M 的一个左正交分解,如果 $X_i \in {}^{\perp}\omega$.

收稿日期:2010-12-01
作者简介:邓芳芳(1978—),女,讲师,硕士,E-mail:ffdeng@gdrtvu.edu.cn
基金项目:国家自然科学基金(10661003)

定义 1.3[3]　设 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$ 且 n 是一个非负整数,如果 M 有一个(有限长的)左正交分解 $0\to X_n\to\cdots\to X_0\to M\to 0$,则记 ${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)=\inf\{n\mid 0\to X_n\to\cdots\to X_0\to M\to 0$ 是 M 的一个左正交分解$\}$.若 M 没有这样的左正交分解,则记 ${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)=\infty$.称 ${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)$ 为 M 的左正交维数.

定义 1.4[2]　$\xi\subseteq\mathrm{mod}\Lambda$,$\xi$ 称为可解的(resolving),如果满足以下 3 个条件:(a) ξ 是扩张闭的;(b) ξ 在满同态的核下是封闭的;(c) ξ 包含所有的投射模.

本文中未提及的记号及定义可参见文献[1-2].

2　主要结果

引理 2.1[3]　设 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$,则 ${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)\leqslant n$,当且仅当 ${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(\Omega^{n}(M))=0$,这里 $\Omega^{n}(M)$ 表示 M 的第 n 级合冲模.

引理 2.2　${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)\leqslant \mathrm{l.id}_{\Lambda}(\omega)$ 对所有 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$ 成立.

证明　不失一般性,可设 $\mathrm{l.id}_{\Lambda}(\omega)=n<\infty$,则对任意 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$ 及 $i\geqslant n+1$,有 $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{i}(\Omega^{n}(M),\omega)\cong\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{i+n}(M,\omega)=0$ 对任意 $i\geqslant 1$ 成立,故 $\Omega^{n}(M)\in{}^{\perp}\omega$.由引理 2.1 知 ${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)\leqslant n$,得证.

由文献[2]可得如下引理:

引理 2.3　$\omega\in\mathrm{mod}\Lambda$ 是一个余倾斜模,则对任意的 $N\in{}^{\perp}\omega$,有正合列 $0\to N\to X\to K\to 0$,这里 $X\in\mathrm{add}_{\Lambda}\omega$,$K\in{}^{\perp}\omega$.并且有 $\mathrm{add}_{\Lambda}\omega={}^{\perp}\omega\cap({}^{\perp}\omega)^{\perp}$.

以下均假设 $\omega\in\mathrm{mod}\Lambda$ 是一个余倾斜模.

引理 2.4　${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)\leqslant 1$ 当且仅当存在正合列 $0\to M'\to V\to M\to 0$,这里 $V\in{}^{\perp}\omega$,$M'\in\mathrm{add}_{\Lambda}\omega$.

证明　由于 ω 是余倾斜模,故 $\mathrm{add}_{\Lambda}\omega\subseteq{}^{\perp}\omega$.从而充分性得证.下面证明必要性,假设 ${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)\leqslant 1$,则有正合列 $0\to V_1\to V_0\to M\to 0$,这里 $V_0,V_1\in{}^{\perp}\omega$.由引理 2.3 知有正合列 $0\to V_1\to M'\to K\to 0$,这里 $M'\in\mathrm{add}_{\Lambda}\omega$,$K\in{}^{\perp}\omega$.考虑推出图(图 1a):

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d] & V_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

a

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

b

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & V_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
& Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

c

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & V' \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

d

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & V \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & V' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

e

图 1　交换图

Fig. 1　Commutative diagrams

由图 1a 的中间列可知 $V\in{}^{\perp}\omega$,从而中间行的正合列即为所求.

令 $\mathcal{X}$ 是 $\mathrm{mod}\Lambda$ 的一个全子范畴,$M\in\mathrm{mod}\Lambda$.若有 $\mathrm{mod}\Lambda$ 中的正合列 $\cdots\to X_n\to\cdots\to X_0\to M\to 0$,$X_i\in\mathcal{X}$,则我们定义 M 的 $\mathcal{X}$-分解维数,表示为 $\mathcal{X}-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(M)=\inf\left\{n\,\middle|\,\text{存在 mod}\Lambda\text{ 中的正合列 }0\to X_n\to\cdots\to X_1\to X_0\to M\to 0,X_i\in\mathcal{X},0\leqslant i\leqslant n\right\}$.

如果没有这样的整数 n 存在,则定义 $\mathcal{X}-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(M)=\infty$.[4]

引理 2.5　对任意 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$,${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(M)\leqslant n$ 当且仅当存在正合列 $0\to M'\to V\to M\to 0$,这里 $V\in{}^{\perp}\omega$,$\mathrm{add}_{\Lambda}\omega-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(M')\leqslant n-1$,$n$ 为非负整数.

证明　充分性显然成立.下面用归纳法证明必要性,$n=1$ 时即为引理 2.4 中情形.令 $n\geqslant 2$,首先有正合列 $0\to Q\to V_0\to M\to 0$,其中 $V_0\in{}^{\perp}\omega$,${}^{\perp}\omega-\dim_{\Lambda}(Q)\leqslant n-1$.由归纳假设知,存在正合列 $0\to K\to V_1\to Q\to 0$,$V_1\in{}^{\perp}\omega$,$\mathrm{add}_{\Lambda}\omega-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(K)\leqslant n-2$.由引理 2.3 知,存在正合列 $0\to V_1\to X\to Y\to 0$,其中 $X\in\mathrm{add}_{\Lambda}\omega$,$Y\in{}^{\perp}\omega$.

首先考虑推出图(图 1b):

由图 1b 易见 $\mathrm{add}_{\Lambda}\omega-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(M')\leqslant n-1$.

再考虑推出图(图 1c):

由图 1c 易知 $V\in{}^{\perp}\omega$,故第 2 行正合列即为所求.

引理 2.6　下列陈述等价:

(1)对任意 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$,存在正合列 $0\to K\to V\to M\to 0$,这里 $V\in{}^{\perp}\omega$,$\mathrm{add}_{\Lambda}\omega-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(K)\leqslant n-1$.

(2)对任意 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$,存在正合列 $0\to M\to V'\to K'\to 0$,这里 $K'\in{}^{\perp}\omega$,$\mathrm{add}_{\Lambda}\omega-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(V')\leqslant n$.

证明　(1)⇒(2),假设存在正合列 $0\to K\to V\to M\to 0$,由引理 2.3 知有正合列 $0\to V\to X\to K'\to 0$,这里 $X\in\mathrm{add}_{\Lambda}\omega$,$K'\in{}^{\perp}\omega$.

考虑推出图(图 1d):

由图 1d 易见 $\mathrm{add}_{\Lambda}\omega-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(V')\leqslant n$,故图 1d 中第 2 行正合列即为所求.

(2) ⇒ (1),假设存在正合列 $0\to M\to V'\to K'\to 0$,由于 $\mathrm{add}_{\Lambda}\omega-\mathrm{resol.dim}_{\Lambda}(V')\leqslant n$,故有正合列

$0 \to K \to X \to V' \to 0$, 这里 $X \in \mathrm{add}_\Lambda\omega$, $\mathrm{add}_\Lambda\omega$ - resol. $\dim_\Lambda(K) \leqslant n-1$.

考虑拉回图(图 1e):

由图 1e 易见 $V \in {}^\perp\omega$,故第 1 行正合列即为所求.

注:易证引理 2.6 中的正合列 $0 \to K \to V \to M \to 0$ 是 M 的一个特殊的 ${}^\perp\omega$ 右逼近,而正合列 $0 \to M \to V' \to K' \to 0$ 是 M 的一个特殊的 $\mathcal{X}$ 左逼近,这里 $\mathcal{X} = \{X \in \mathrm{mod}\Lambda \mid \mathrm{add}_\Lambda\omega - \mathrm{resol.}\dim_\Lambda(X) \leqslant n\}$.

定理 2.7　对任意 $M \in \mathrm{mod}\Lambda$,下列陈述等价:

(1) ${}^\perp\omega - \dim_\Lambda(M) \leqslant n$.

(2) $\Omega^n(M) \in {}^\perp\omega$.

(3) M 有一个特殊的 ${}^\perp\omega$ 右逼近 $f: V \to M$,并且 $\mathrm{add}_\Lambda\omega - \mathrm{resol.}\dim_\Lambda(\ker f) \leqslant n-1$.

(4) M 有一个特殊的 $\mathcal{X}$ 左逼近 $g: M \to V'$,并且 $\mathrm{coker}\, g \in {}^\perp\omega$, 这里 $\mathcal{X} = \{X \in \mathrm{mod}\Lambda \mid \mathrm{add}_\Lambda\omega - \mathrm{resol.}\dim_\Lambda(X) \leqslant n\}$.

证明　由引理 2.1 可知(1)$\Leftrightarrow$(2),由引理 2.5、2.6 知(1)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4).

由引理 2.2 及定理 2.7 可得如下推论:

推论 2.8　下列陈述等价:

(1)对任意 $M \in \mathrm{mod}\Lambda$,存在正合列 $0 \to K \to V \to M \to 0$,这里 $V \in {}^\perp\omega$, $K \in \widehat{\mathrm{add}_\Lambda\omega}$.

(2)对任意 $M \in \mathrm{mod}\Lambda$,存在正合列 $0 \to M \to V' \to K' \to 0$,这里 $K' \in {}^\perp\omega$, $V' \in \widehat{\mathrm{add}_\Lambda\omega}$.

由于 ${}^\perp\omega \subseteq \mathrm{mod}\Lambda$ 是可解的,故由文献[5]中的 corollary 0.3 可得如下推论:

推论 2.9　若 $\omega \in \mathrm{mod}\Lambda$ 是一个余倾斜模,则 ${}^\perp\omega$ 是 $\mathrm{mod}\Lambda$ 的函子有限子范畴.

参考文献:

[1] ANGELERI H L, COELHO F U. Infinitely generated tilting modules of finite projective dimension [J]. Forum Math, 2001,13:239-250.

[2] AUSLANDER M, REITEN I. Applications of contravariantly finite subcategories [J]. Adv Math, 1991, 86:111-152.

[3] HUANG Zhao-yong. Selforthogonal modules with finite injective dimension [J]. Science in China:Ser A, 2000,43:1174-1181.

[4] AUSLANDER M, BUCHWEITZ R O. The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations [J]. Soc Math France, 1989,38: 5-37.

[5] KRAUSE H, SOLBERG O. Applications of cotorsion pairs [J]. J London Math Soc, 2003,68: 631-650.

[6] AUSLANDER M, SMAL S O. Preprojective modules over artin algebras, [J]. J Algebra, 1980,66: 61-122.

[7] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra: De Gruyter Exp. in Math. 30 [M]. Berlin:Walter de Gruyter, 2000.

[8] ENOCHS E E, OYONARTE L. Covers, Envelopes and Cotorsion Theories [M]. New York :Nova Science Publishers, 2002.

[9] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. New York :Academic Press, 1979.

【责任编辑　李晓卉】