

涉及全纯函数分担值的正规定则

邓炳茂, 雷春林

(华南农业大学 理学院, 广东广州 510642)

摘要: 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族全纯函数, a_1, a_2 为 2 个不同的有穷复数, M 为正整数. 若对任意的 $f \in \mathcal{F}, f(z) - a_1$ 至多有 M 个零点, 且 $f - a_i (i = 1, 2)$ 的零点重级至少为 2, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

关键词: 全纯函数; 正规族; 分担值
中图分类号: O174.5 文献标志码: A 文章编号: 1001-411X(2012)02-0270-03

Normal Families and Shared Values of Holomorphic Functions

DENG Bing-mao, LEI Chun-lin

(College of Sciences, South China of Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic functions in domain $\mathcal{D}$, let a_1, a_2 be 2 distinct finite complex numbers, and let M be a positive integer. Suppose that each $f \in \mathcal{F}, f(z) - a_1$ has at most M zeros, and all zeros of $f - a_i (i = 1, 2)$ have multiplicity at least 2, then $\mathcal{F}$ is normal in $\mathcal{D}$.

Key words: holomorphic functions; normal families; shared values

设 D 为复平面 C 上的一区域, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内一族亚纯函数. 在 Montel 的意义下, 如果任意函数列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, 存在 1 个子序列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 内按照球面距离内闭一致收敛到 1 个亚纯函数或者 ∞ , 则称函数族 $\mathcal{F}$ 在 D 内是正规^[1].

设 f 与 g 表示 2 个非常数亚纯函数, b 为常数. 若 $f - b = 0$ 当且仅当 $g - b = 0$, 忽略重数 (计算重数), 则称 f 和 g IM(CM) 分担 b ^[2-3].

定理 A 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族全纯函数. 若 $\mathcal{F}$ 在 D 内内闭一致有界, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 B 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族全纯函数, a_1, a_2 为 2 个不同的有穷复数. 若对任意的 $f \in \mathcal{F}, f(z) \neq a_1, a_2$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

以上 2 个定理就是著名的 Montel 正规定则^[1].

在 1925 年, Bloch and Valiron 推广了定理 B, 得到如下定理.

定理 C 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的全纯函数族, a_1, a_2 为 2 个不同的有穷复数. 若对任意的 $f \in \mathcal{F}, f -$

$a_i (i = 1, 2)$ 的零点重级均 $\geq m_i (i = 1, 2)$, 且 $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} < 1$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规^[1].

本文继续对定理 B 与定理 C 进行研究, 得到了如下 2 个定理, 它改进了定理 B.

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族全纯函数, a_1, a_2 为 2 个不同的有穷复数, M 为正整数. 若对任意的 $f \in \mathcal{F}, f(z) - a_1$ 至多有 M 个零点, 且 $f - a_i (i = 1, 2)$ 的零点重级至少为 2, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

定理 2 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族全纯函数, a_1, a_2 为 2 个不同的有穷复数. 若对任意的 $f, g \in \mathcal{F}, f$ 与 g IM 分担 a_1 , 且 $f - a_i (i = 1, 2)$ 的零点重级至少为 2, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规.

下面的例 1 说明了定理 C 中的条件 $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} < 1$ 不能直接改为 $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1$.

例 1 设 $D = \{z \mid |z| < 1\}, \mathcal{F} = \{f_n: n = 1, 2, \dots\},$

其中 $f_n(z) = \sin^2(nz)$. 对任意的函数 $f \in \mathcal{F}$, 其所有零点均为 2 重零点, 但 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 内不正规.

1 引理

引理 1^[4] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 $\mathcal{D}$ 内的一族全纯函数. 则 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 上正规的充要条件是: $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 内任意一点都正规.

引理 2^[3] 设 $f(z)$ 是区域 $|z| < R$ 内的全纯函数, 则

$$T(r,f) \leq \log^+ M(r,f) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r} T(\rho,f),$$
$$(0 < r < \rho < R).$$

(1)

引理 3^[1] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $\mathcal{D}$ 内的一族全纯函数. 则 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 内正规的充要条件是: 对区域 $\mathcal{D}$ 中的任意闭子集 E , 存在正数 M , 使得

$$|f'(z)| \leq M(1 + |f(z)|^2),$$

对 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 $f(z)$ 和 E 内所有的点 z 成立.

引理 4^[5] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆内的全纯函数族. 如果 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 则存在

- 1) 数 $r, 0 < r < 1$;
- 2) 点列 $z_n, |z_n| < r$;
- 3) 函数列 $f_n, f_n \in \mathcal{F}$;
- 4) 正数列 $\rho_n, \rho_n \rightarrow 0$, 使得

$$g_n(\xi) = f_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g(\xi),$$

按球面距离内闭一致收敛, 其中 g 为非常数整函数.

2 例 1 与定理的证明

例 1 的证明 由引理 3 知, 若要证明 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 内不正规, 只须证明对任意的 M , 存在 $\mathcal{D}$ 中的一个闭子集 E , 存在 $f_n(z) \in \mathcal{F}$, 在 E 中存在这样的点 z_n , 使得

$$\frac{|f'_n(z_n)|}{1 + |f_n(z_n)|^2} > M \text{ 成立.}$$

取 $E = \left\{ z \mid |z| \leq \frac{1}{2} \right\}, f_n(z_n) = \sin^2(nz_n) \in \mathcal{F}$, 令

$$z_n = \frac{\pi}{4n} \in E. \text{ 则对任意的 } M > 0, \text{ 总存在正数 } n \text{ 使得}$$

$$n > \frac{5}{4}M. \text{ 因此}$$

$$\frac{|f'_n(z_n)|}{1 + |f_n(z_n)|^2} = \frac{n |\sin 2(nz_n)|}{1 + |\sin^2(nz_n)|^2} = \frac{n}{1 + 1/4} > M,$$

所以 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 上不正规.

定理 1 的证明 不失一般性, 不妨设区域 $\mathcal{D}$ 为单位圆. 由引理 1 知, 欲证 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 内正规, 只需证明对任意的 $z_0 \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 反证, 假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 4, 存在

- 1) 数 $r, 0 < r < 1$;
- 2) 点列 $z_n, |z_n| < r$;
- 3) 函数列 $f_n, f_n \in \mathcal{F}$;
- 4) 正数列 $\rho_n, \rho_n \rightarrow 0$, 使得

$$g_n(\xi) = f_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g(\xi),$$

按球面距离内闭一致收敛, 其中 g 为非常数整函数.

因此 $g_n(\xi) - a_i = f_n(z_n + \rho_n \xi) - a_i$ 按球面距离内闭一致收敛于 $g(\xi) - a_i (i = 1, 2)$. 由 Hurwitz 定理可得, $g - a_i (i = 1, 2)$ 的零点重级至少为 2, 且 $g = a_1$ 的零点个数至多为 M .

下面分 2 种情形考虑.

情形 1 g 是超越整函数. 则有

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n,$$

其中 $c_n (n = 1, 2, \dots)$ 为常数, 且有无穷多个 $c_n \neq 0$. 则由柯西不等式可得

$$|c_n| r^n \leq M(r, g), \quad (r > 0, n = 0, 1, \dots).$$

因此, 对任意的正整数 p , 总有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r, g)}{r^p} = \infty. \tag{2}$$

由引理 2, 令 $\rho = 2r$, 则有

$$\log^+ M(r, g) \leq 3T(2r, g). \tag{3}$$

再由 $g - a_1$ 的零点个数至多为 M , 可得

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_1}\right) = O(\log r).$$

因此存在正数 $A > 0$, 使得 $\overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_1}\right) \leq A \log r$ 成立.

由 Nevanlinna 第 2 基本定理可得

$$T(r, g) \leq$$
$$\overline{N}(r, g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a_2}\right) + S(r, g) \leq$$
$$A \log r + \frac{1}{2} T(r, g) + S(r, g) \leq$$
$$A \log r + \frac{1}{2} T(r, g) + \frac{1}{3} T(r, g),$$

因此可得 $T(r, g) \leq 6A \log r$.

所以

$$3T(2r, g) \leq 18A \log 2r \leq$$
$$18A (\log 2 + \log r) \leq 36A \log r, \quad (r \rightarrow \infty). \tag{4}$$

由式(3)与式(4)可得

$$\log^+ M(r, g) \leq \log r^{364} \Rightarrow M(r, g) \leq r^{364}, \quad (r \rightarrow \infty).$$

令 $p = 364 + 1$, 则有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r, g)}{r^p} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{364}}{r^{364+1}} = 0,$$

这与式(2)矛盾. 因此 g 不可能是超越整函数.

情形 2 g 是非常数多项式. 不妨设

$$g(\xi)-a_1=A(\xi-\alpha_1)^{l_1}(\xi-\alpha_2)^{l_2}\cdots(\xi-\alpha_n)^{l_n},\tag{5}$$

$$g(\xi)-a_2=A(\xi-\beta_1)^{s_1}(\xi-\beta_2)^{s_2}\cdots(\xi-\beta_m)^{s_m},\tag{6}$$

其中 $A,\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与 $\beta_j(j=1,2,\cdots,m)$ 是常数, $s_j(j=1,2,\cdots,m)$ 与 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是正整数.

由式(5)与式(6)可得

$$\sum_{i=1}^nl_i=\sum_{j=1}^ms_j=b,\tag{7}$$

其中 b 是正整数. 对式(5)与式(6)求导数,可得

$$g'(\xi)=A(\xi-\alpha_1)^{l_1-1}(\xi-\alpha_2)^{l_2-1}\cdots(\xi-\alpha_n)^{l_n-1}h(\xi),\tag{8}$$

$$g'(\xi)=A(\xi-\beta_1)^{s_1-1}(\xi-\beta_2)^{s_2-1}\cdots(\xi-\beta_m)^{s_m-1}y(\xi),\tag{9}$$

其中 $h(\xi)$ 是次数为 $n-1$ 的多项式, $y(\xi)$ 是次数为 $m-1$ 的多项式. 再由 $a_1\neq a_2$,可得 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与 $\beta_j(j=1,2,\cdots,m)$ 相互判别. 因此 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $y(\xi)$ 的零点, $\beta_j(j=1,2,\cdots,m)$ 是 $h(\xi)$ 的零点. 即有

$$\begin{cases} b-m\leq n-1; \\ b-n\leq m-1. \end{cases}\tag{10}$$

因为 $g-a_i(i=1,2)$ 的零点重级至少为 2,可得 $l_i\geq 2(i=1,2,\cdots,n),s_j\geq 2(j=1,2,\cdots,m)$.

因此

$$\begin{cases} 2n\leq b; \\ 2m\leq b. \end{cases}\tag{11}$$

再由式(10)与式(11)可得

$$\begin{cases} m\leq b-m\leq n-1; \\ n\leq b-n\leq m-1, \end{cases}$$

即得 $n\leq n-2$,矛盾. 因此 g 不可能是非常数多项式.

综合上述情形,可得 g 为常数,这与 g 为非常数整函数矛盾. 因此 $\mathcal{F}$ 在点 z_0 处正规. 再由 z_0 的任意性知, $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 内正规.

定理 2 的证明 不妨设 D 为单位圆. 由引理 1 知,要证 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 上正规,只需证明对任意的 $z_0\in\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 下面分 2 种情形讨论.

情形 1 $f(z_0)-a_1\neq 0$. 则存在 z_0 的某邻域 $\Delta(z_0,\delta_1)=\{z:|z|<\delta_1\}$,使得对任意的 $z\in\Delta(z_0,\delta_1)$,有 $f(z)-a_1\neq 0$. 由对任意的 $f,g\in\mathcal{F}$, f 与 g IM

分担 a_1 ,可得任意的 $z\in\Delta(z_0,\delta_1)$,有 $g(z)-a_1\neq 0$. 假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规,由引理 4,存在

- 1) 数 $r,0<r<1$;
- 2) 点列 $z_n,|z_n|<r$;
- 3) 函数列 $f_n,f_n\in\mathcal{F}$;
- 4) 正数列 $\rho_n,\rho_n\rightarrow 0$,使得

$$g_n(\xi)=f_n(z_n+\rho_n\xi)\rightarrow g(\xi),$$

按球面距离内闭一致收敛,其中 g 为非常数整函数.

因此 $g_n(\xi)-a_i=f_n(z_n+\rho_n\xi)-a_i$ 按球面距离内闭一致收敛于 $g(\xi)-a_i(i=1,2)$. 由 Hurwitz 定理可得, $g-a_i(i=1,2)$ 的零点重级至少为 2.

则由 Nevanlinna 第 2 基本定理可得

$$\begin{aligned} T(r,g)&\leq \\ \overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a_2}\right)+S(r,g)&\leq \\ \overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a_2}\right)+S(r,g)&\leq \\ \frac{1}{2}T(r,g)+S(r,g), \end{aligned}$$

与 g 为非常数全纯函数矛盾. 因此 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规.

情形 2 $f(z_0)-a_1=0$. 则存在 z_0 的某去心邻域 $\Delta^\circ(z_0,\delta_2)=\{z:0<|z-z_0|<\delta_2\}$,当 $z\in\Delta^\circ(z_0,\delta_2)$ 时,有 $f(z)-a_1\neq 0$. 再由对任意的 $f,g\in\mathcal{F}$ IM 分担 a_1 ,可得 $g(z)-a_1$ 在 $\Delta(z_0,\delta_2)=\{z:|z-z_0|<\delta_2\}$ 内只有 1 个零点. 由定理 1,可得 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规.

综上所述,由 z_0 的任意性以及引理 1,可得 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{D}$ 内正规. 证毕.

参考文献:

[1] YANG Le. Value Distribution Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993: 1-63.

[2] YANG Chong-jun, YI Hong-xun. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions [M]. Beijing: Science Press, 2003: 1-227.

[3] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 1-72.

[4] 庞学诚, 梁金荣, 柴俊. 复变函数[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 56-126.

[5] ZALCMAN L. A Heuristic Principle In Complex Function Theory [J]. Amer Math Monthly, 1975, 82: 813-817.

【责任编辑 李晓卉】