

直线轨迹机构的解析法设计

李德威

(农业工程系)

摘要 本文研究了用解析法设计实现直线轨迹的平面铰接机构的一种计算方法，并算出了实例的数字结果。从由所得数字结果得出的机构运动轨迹可见，这种设计方法有很高的精度。这种方法也可用于其他轨迹实现机构的设计，有较高的实用意义。

关键词 实现轨迹机构，复数，多回路机构

实现直线轨迹的平面铰接机构广泛地应用于农业机械和建筑机械。过去的设计方法以作图法为主。文献[1]中有一些设计实例，但都是由几何作图法确定构件的尺寸，既费时又欠准确。由于实现直线轨迹的铰接机构要求各构件有很高的尺寸精度，否则得出的轨迹会有很大的误差，因此在许多场合，作图法已不可取。必须采用解析法进行设计，才能得到满意的结果。文献[2]对解析法有全面的简单介绍。笔者现结合在美国佛罗里达大学时参与 G. N. Sandor 教授研究工作的体会，用复数解法来探讨这一问题。

1 机构的选用和计算原理

1.1 机构的选用

为了实现直线轨迹，现选用图1的多回路六杆机构为执行机构。该机构由回路I，回路II和回路III组成，分别如图2(a)，图2(b)和图2(c)所示。图中，P点是轨迹产生点。图1机构比常用的平面四连杆铰接机构优越，是因为作为实现轨迹的机构，它可以在给出轨迹上7个已知点的条件下进行设计计算，而平面四连杆铰接机构设计，预给的已知点数不能超过5个。预给的点数越多，则设计出来通过这些点的机构，其实现的轨迹就越精确。另外，图1的多回路六杆机构在参数的选择上也比平面四连杆机构有更多的选择余地，可以满足多重需要。

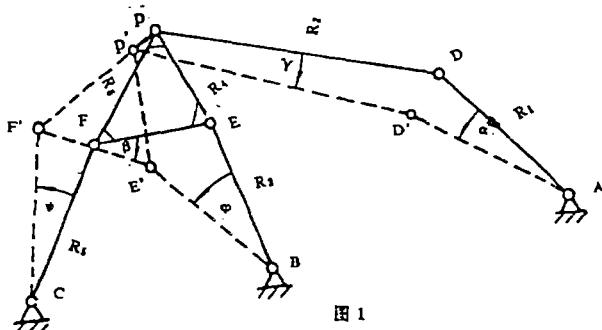


图 1

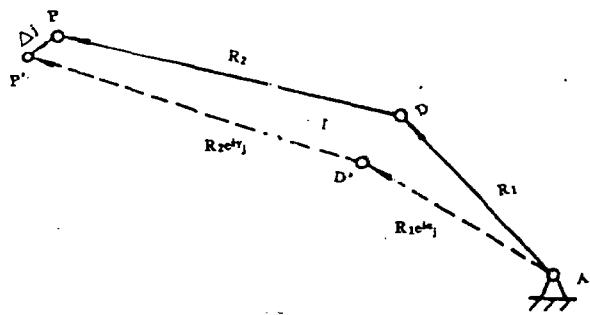
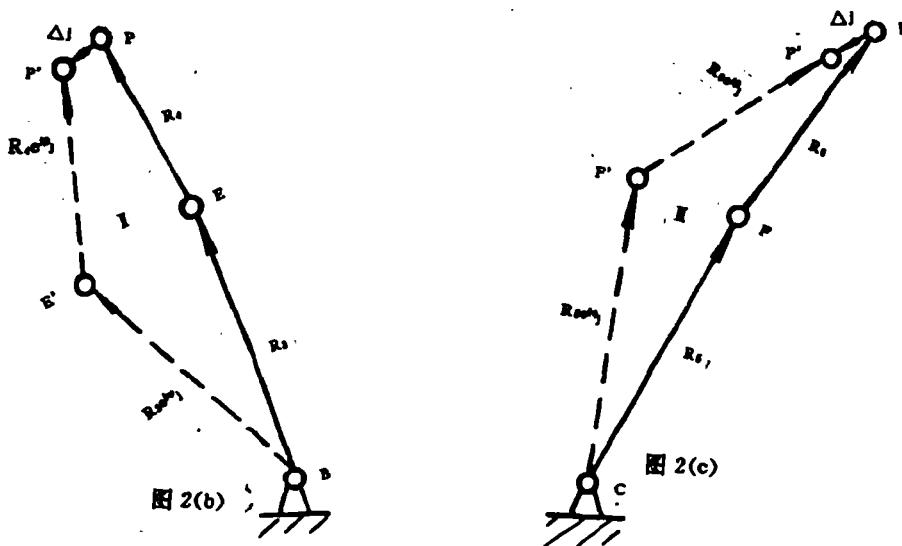


图 2 (a)



1.2 计算原理

现用复数 R_k 表示机构中第 K 个构件的平面位置, 表达式如下:

$$R_k = R_k e^{i\theta_j} = R_k (\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$$

式中,

$$i = \sqrt{-1}$$

$R_k = |R_k|$ 表示第 K 个构件的长度。

$Z_j = \arg R_k$ 表示构件在第 j 个位置时的幅角。

若令 θ_1 和 θ_j 分别表示图 2(a) 中 R_k 在第一个位置和第 j 个位置时的幅角, λ_1 和 λ_j 分别表示 R_k 在第一个位置和第 j 个位置时的幅角, Δ_j 表示 P 点的位移, 则对于图 2(a) 所示 R_k 和 R_k 在两个位置时的回路 I, 有下列关系式:

$$R_1 e^{i\theta_1} + R_j e^{i\theta_j} + \Delta_j = R_1 e^{i\theta_1} + R_k e^{i\theta_j} \quad (1a)$$

(1a) 可简化成下面形式:

$$R_1 (e^{i\theta_j} - 1) + R_k (e^{i\theta_j} - 1) = \Delta_j \quad (1)$$

(1) 式中,

$$\alpha_j = \theta_j - \theta_1$$

$$\gamma_j = \lambda_j - \lambda_1$$

同理, 对于回路 II 和回路 III, 也有类似的方程式

$$R_1 (e^{i\theta_j} - 1) + R_4 (e^{i\theta_j} - 1) = \Delta_j \quad (2)$$

和

$$R_3 (e^{i\theta_j} - 1) + R_4 (e^{i\theta_j} - 1) = \Delta_j \quad (3)$$

式中, α_j , β_j , γ_j 分别为 R_3 , R_4 和 R_1 在第 j 个位置时的幅角与在第一个位置时的幅角之差。

下面先解方程 (1), 分析 (1), (2), (3) 的结构显见, 它可在预给 7 个点的条件下求出唯一解。如果预给点超过 7 个, 则设计将受到附加条件的制约。本文为了简化计算工作量起见, 仅在预给 4 个已知点的情形下求解。把已知 4 个点的有关参数分别代入 (1), 可由原来的方程 (1) 得出下列由 3 个方程组成的方程组:

$$R_1 (e^{i\theta_j} - 1) + R_2 (e^{i\gamma_j} - 1) = \Delta_j \quad (4)$$

$$R_1 (e^{i\theta_j} - 1) + R_3 (e^{i\alpha_j} - 1) = \Delta_j \quad (5)$$

$$R_1(e^{i\gamma_2}-1) + R_2(e^{i\gamma_3}-1) = \Delta_3 \quad (6)$$

方程(4)～(6)是复数方程。分离(4)～(6)的实部和虚部，可得出6个实数方程，从而解出6个未知量。如果 a_1 ， a_2 ， a_3 已知， γ_1 自由选定，则可由(4)～(6)解出 R_{1x} ， R_{1y} ， R_{2x} ， R_{2y} ， γ_2 和 γ_3 这6个未知量。其中：

$$R_1 = R_{1x} + R_{1y,i}$$

$$R_2 = R_{2x} + R_{2y}i$$

以上所述得出6个实数方程的求解过程,从理论上可行,但实际解算却比较困难,因为所得由6个非线性超越方程组成的方程组,难于求解。

为此, 现采取下列解法:

根据线性方程组理论可知,对于由(4)~(6)确定的未知数 R_1, R_2 , 其有解的充分必要条件是增广矩阵

$$\begin{bmatrix} e^{ia_1} - 1 & e^{iv_1} - 1 & \Delta_1 \\ e^{ia_2} - 1 & e^{iv_2} - 1 & \Delta_2 \\ e^{ia_3} - 1 & e^{iv_3} - 1 & \Delta_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

的秩为2, 即有

$$\text{Det} \begin{bmatrix} e^{ia_1} - 1 & e^{iv_1} - 1 & \Delta_1 \\ e^{ia_2} - 1 & e^{iv_2} - 1 & \Delta_2 \\ e^{ia_3} - 1 & e^{iv_3} - 1 & \Delta_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

方程 (8) 可写成:

$$W_1 e^{i\tau_1} + W_2 e^{i\tau_2} + W_3 e^{i\tau_3} + W_4 = 0 \quad (9)$$

式中，

$$W_1 = - \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \Delta_2 \\ e^{i\alpha_3} - 1 & \Delta_3 \end{vmatrix} \quad (9a)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{k_1} - 1 & \Delta_1 \\ e^{k_2} - 1 & \Delta_2 \end{vmatrix} \quad (9b)$$

$$W_3 = - \begin{vmatrix} e^{i\alpha_1} - 1 & \Delta_1 \\ e^{i\alpha_2} - 1 & \Delta_2 \end{vmatrix} \quad (9c)$$

$$W_s = -W_1 - W_2 - W_3 \quad (9d)$$

今。

$$W = W_0 + W_1 e^{i\tau_1} \quad (10)$$

则 (9) 可写为:

$$W_{-2}e^{i\gamma_2} + W_{-1}e^{i\gamma_1} + W = 0 \quad (11)$$

分离实部和虚部, (11) 也是不易求解的超越方程。但由 (9) 可见, W_1, W_2, W_3, W_0 组成的关系恰如平面四杆机构。因此, 现想像存在一个由 W_1, W_2, W_3, W_0 组成的假想平面四杆机构, 如

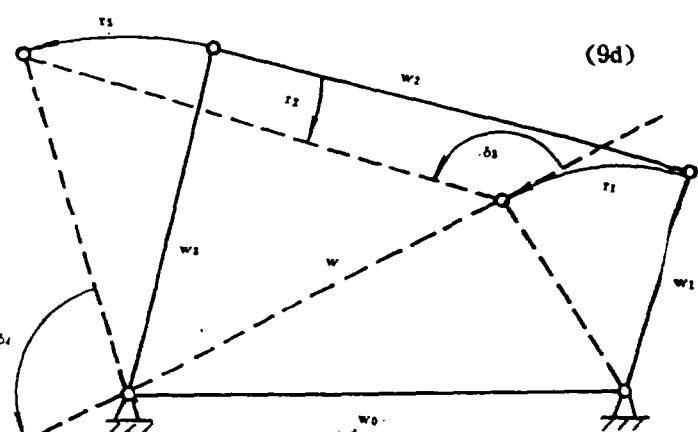


图3

图3所示。用几何法可由此假想平面四杆机构解出：

$$\cos\delta_3 = \frac{|\underline{W}_3|^2 - |\underline{W}_2|^2 - |\underline{W}|^2}{2 \cdot |\underline{W}_2| \cdot |\underline{W}|} \quad (12)$$

$$\cos\delta_4 = \frac{|\underline{W}_2|^2 - |\underline{W}_3|^2 - |\underline{W}|^2}{2 \cdot |\underline{W}_3| \cdot |\underline{W}|} \quad (13)$$

δ_3, δ_4 各有两解, 现只取一解, 进而解出:

$$\gamma_2 = \arg \underline{W} + \delta_3 - \arg \underline{W}_2, \quad (14)$$

$$\gamma_3 = \arg \underline{W} - \delta_4 - \arg \underline{W}_3 + 180^\circ \quad (15)$$

把 γ_2, γ_3 代入 (5), (6), 分离 (5), (6) 的实部和虚部, 由所得的线性方程组解出 R_1 和 R_2 。

方程 (2), (3) 亦可同法解出。

2 数字结果

建立高斯平面如图4所示, 预给直线轨迹上的4个点1, 2, 3, 4, 长度为

$$|\Delta_{12}| = |\Delta_{23}| = |\Delta_{34}| = 200 \text{ mm}$$

以点4为起点, 用复数表示有下列结果:

$$\underline{\Delta}_1 = -200i \quad \underline{\Delta}_2 = -400i \quad \underline{\Delta}_3 = -600i$$

对于回路 I, 选定 $\alpha_1 = 25^\circ, \alpha_2 = 55^\circ, \alpha_3 = 90^\circ, \gamma_1 = 35^\circ$ 。

根据方程(4)~(15)算出结果如下:

$$\gamma_2 = 48^\circ 1' \quad \gamma_3 = 29^\circ 42'$$

$$\underline{R}_1 = -218.99 + 309.87i \quad |\underline{R}_1| = 379.44 \text{ mm}$$

$$\underline{R}_2 = -179.56 - 135.93i \quad |\underline{R}_2| = 225.21 \text{ mm}$$

对于回路 I, 选定 $\varphi_1 = 15^\circ, \varphi_2 = 30^\circ, \varphi_3 = 40^\circ, \beta_1 = -25^\circ$,

同法算出结果如下:

$$\beta_2 = -42^\circ 7' \quad \beta_3 = -72^\circ 7'$$

$$\underline{R}_3 = -479.43 + 279.71i \quad |\underline{R}_3| = 555.05 \text{ mm}$$

$$\underline{R}_4 = 121.71 + 159.59i \quad |\underline{R}_4| = 200.70 \text{ mm}$$

对于回路 II, 选定 $\psi_1 = 50^\circ$, 算出结果如下:

$$\psi_2 = 78^\circ 25' \quad \psi_3 = 60^\circ 8'$$

$$\underline{R}_5 = 21.65 + 158.63i \quad |\underline{R}_5| = 160.11 \text{ mm}$$

$$\underline{R}_6 = 296.05 + 371.48i \quad |\underline{R}_6| = 475.02 \text{ mm}$$

算出支座尺寸如下:

$$\underline{R}_{ca} = 675.43 + 90.82i \quad |\underline{R}_{ca}| = 681.50 \text{ mm}$$

$$\underline{R}_{ba} = 40.83 + 265.35i \quad |\underline{R}_{ba}| = 268.47 \text{ mm}$$

$$\underline{R}_{cb} = 716.25 + 356.17i \quad |\underline{R}_{cb}| = 799.92 \text{ mm}$$

根据上述结果的作图如图5所示。经检验, 由以上结果得出的机构, 其 P 点的轨迹是一条精确度很高的直线。

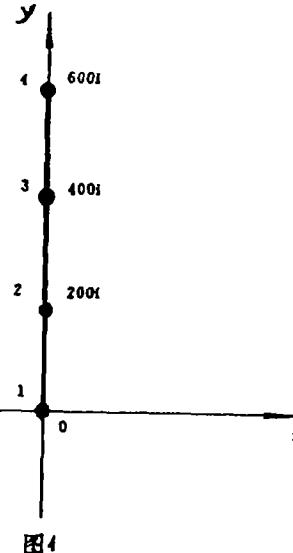


图4

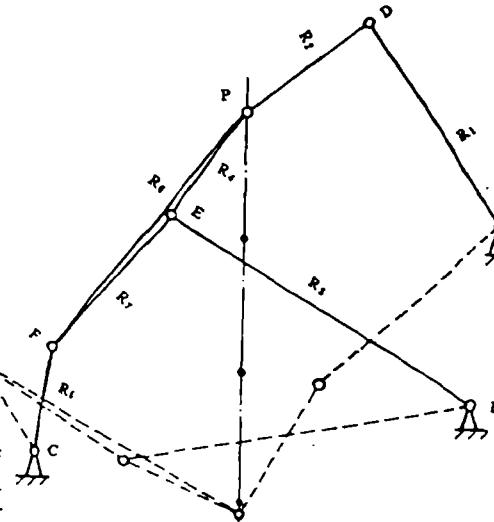


图5

3 结论

3.1 本文提供的解析法不仅适于实现直线轨迹平面铰接机构的设计, 也适用于实现其他曲

$$\text{蚜害指数} = \frac{\sum n_i \cdot i}{4 \sum n_i} = \frac{n_1 \times 1 + n_2 \times 2 + n_3 \times 3 + n_4 \times 4}{(n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4) \times 4}$$

n_0 — n_4 分别代表各级株数; 0—4 为各级值。

$$\text{卷叶株率} = \frac{n_1 + n_4}{\sum n_i} \times 100$$

1.2 田间抗性鉴定

供试品种与前试验品种相同。每品种种植面积为 0.133 3 亩, 设 2 个重复。为增加萝卜蚜的虫口密度, 从别的田块捕获蚜虫作为补充虫源。定植后 10 天开始调查, 共调查 3 次, 采用上述蚜害分级标准。

1.3 蚜虫的发育和繁殖力

选用不同抗性表现的 5 个品种: 奶白、坡头黄叶白、佛山黑叶白、上海白、金边白。用口径 12 cm 的塑料花盆种植, 每盆栽 1 株, 每品种设 10 个重复。在菜株 5 片叶时接入 5 头 3~4 龄若蚜, 然后取每 1 株同 1 天羽化的雌成蚜 1 头, 每天记录产若蚜数量, 检查直至雌蚜繁殖终止。并取同 1 天产下的若蚜, 观察其发育速度。

1.4 分泌蜜露的测定

试验品种与上述的相同, 每盆种 1 株, 共设 7 个重复。植株 5 片真叶时, 接入 5 头 3~4 龄若蚜, 待成长雌蚜产下若蚜后, 每重复选取 3 头 4 龄若蚜测定分泌蜜露量。方法用滤纸色斑面积法^[1]。将滤纸喷上 0.2% 的溴甲酚绿酒精溶液, 待干后放在若蚜为害的叶背上。当蚜虫分泌蜜露滴在滤纸上, 滤纸即出现蓝色斑。然后测定色斑的面积, 以表示蜜露排出的相对数量。

1.5 田间花叶病发生情况

将奶白、北海白、佛山黑叶白、台山白、夏白和金边白分别在本院农场和元岗农科站种植。在农场每品种种植面积为 0.133 3 亩, 在元岗农科站每品种种植 0.666 7 亩, 均设 3 个重复。定植后 25 天调查发病率。

2 试验结果

2.1 温室抗性鉴定

从表 1 结果看, 白菜受蚜害后不同品种产生不同的反应, 表现在蚜虫建立群体及植株受害程度的差异。接虫后 20 天调查, 品种奶白、北海白、葵叶和都会白等蚜虫指数平均为 0.87~0.92, 卷叶株率高达 90%~96%, 表现出最易感虫。上述品种接种后 15 天, 平均每株有蚜虫达 90~135 头, 说明取食这些品种蚜虫的群体增长最快, 而上海白, 金边白的蚜害指数为 0.43 和 0.46; 卷叶率为 13.3% 和 20%; 蚜虫增长数平均每株依次为 34.8 和 27.27 头, 表现出较高的抗性。另方面从受害程度也说明品种夏白、马耳白抗性表现较好。余下品种抗性居中, 也属感虫; 然而蚜虫在这些品种上增长的虫群明显较奶白等 3 个品种的低。

2.2 田间抗性鉴定

品种奶白、北海白、葵叶白、坡头黄叶白, 在植后 30 天, 蚜害指数为 0.8~0.9; 卷叶株率为 80%~90%; 虫口密度平均每株达 160.6~192.2 头, 表现为感虫(表 2)。而上海白和金边白, 蚜害指数分别为 0.23 和 0.15; 卷叶株率分别为 25% 和 5%, 虫口密度平均每株有 26.6 头和 18.4 头, 表现为抗虫, 夏白的抗性则次之, 余下品种的抗性居中。说明大田的鉴定结果与温室试验的结果基本一致。

表1 白菜品种受萝卜蚜为害后的反应* (网室 1980.1)

品 种	蚜害指数 (20天)	接种 15 天后虫口密度 (头/株)
奶 白	0.92 a	135.1 a
北海白	0.91 a	128.67 a
葵叶白	0.87 a	91.87 a
都会白	0.88 a	90.93 bc
坡头黄叶白	0.82 ab	99.67 bc
黄叶白	0.83 ab	80.33 bc
坡头黑叶白	0.84 ab	71.73 d
61号白	0.82 ab	87.2 c
坡头黑×佛山黑	0.82 ab	65.67 d
台山白×马耳白	0.85 ab	64.89 d
台山白	0.80 ab	63.5 d
佛山黑叶白	0.79 ab	66.17 d
沙堤白	0.74 ab	88.23 c
葵扇白	0.77 ab	68.93 d
江门白	0.78 ab	86.83 c
马耳白	0.69 abc	65.77 d
夏白	0.63 bcd	45.63 c
上海白	0.43 d	34.8 f
金边白	0.46 cd	27.27 f

* 表的直行英文字母不相同时, 表示经 Tukey 固定极差测验差异显著。

表2 白菜品种在田间受蚜害程度比较 1980.11

品 种	受害程度 (30天)		植后 30 天虫口密度 (X ₁) (头/株)
	蚜害指数 (y)	卷叶株率 (X ₂) (%)	
奶 白	0.91	90	192.2
北海白	0.90	87	114.0
葵叶白	0.80	80	134.0
都会白	0.79	80	128.0
坡头黄叶白	0.80	80	160.6
黄叶白	0.88	84	161.6
坡头黑叶白	0.65	65	71.4
61号白	0.71	70	113.4
坡头黑×佛山黑	0.67	67	67.8
台山白×马耳白	0.60	55	57.4
台山白	0.57	58	58.8
佛山黑叶白	0.60	60	112.0
沙堤白	0.78	78	135.6
葵扇白	0.68	70	63.0
江门白	0.76	77	141.2
马耳白	0.61	60	59.2
夏白	0.44	40	54.0
上海白	0.23	25	26.6
金边白	0.15	5	18.4

线轨迹机构的设计，它精确度高，计算过程简单，对比作图法有很多优点。

3.2 用复数解法解平面机构问题，除了可解决轨迹机构的设计外，还可以解决既给定位移，又给定速度、加速度的机构导向问题。这一专题准备今后另文探讨，本文限于篇幅，不作研究。

3.3 和平面四杆机构比较，多回路机构在机构设计时有多种优点，值得注意。

参 考 文 献

- 1 C. H. 柯热夫尼科夫等. 机构元件. 隆礼湘译. 北京: 机械工业出版社, 1965, 535~548
- 2 C. H. 苏, C. W. 拉德克利夫. 运动学和机构设计. 上海交通大学机械原理及零件教研室译. 北京: 机械工业出版社, 1983. 9~76

ANALYTIC DESIGN TO PATH GENERATOR FOR STRAIGHT LINE

Li Dewei

(Department of Agricultural Engineering)

Abstract In this paper, research on the analytic design method to hinged planar mechanisms is reported. Synthesis of path generator for prescribed points lying in a straight line was studied and the numeral result of a correlative example calculated. The tracer generated from the numeral result coincided well with the given line. The calculation method offered in this paper can be further applied to other planar linkage design.

Key words Path generator; Complex number; multiloop mechanisms