

闭链二自由度平面五杆机构运动分析

严慕容

(华南农业大学 工程学院, 广东 广州 510642)

摘要: 应用矩阵法建立常用闭链二自由度平面五杆机构基本杆组运动分析数学模型, 并据此编制相应的杆组位移、速度和加速度分析模块, 开发了平面五杆机构的计算机辅助分析与仿真系统, 实现了机构运动参数数值计算、运动线图自动绘制和机构动态仿真等计算机辅助可视化运动分析, 所建立的数学模型与开发的程序具有较强的通用性. 最后以机械系统动力学分析软件 ADAMS 进行仿真, 验证了机构运动分析数学模型及程序的正确性.

关键词: 平面五杆机构; 运动分析; 杆组; 数学模型

中图分类号: TH112.1

文献标识码: A

文章编号: 1001-411X(2004)04-0093-05

Kinematics analysis for planar five-bar mechanism with dual freedoms

YAN Mu-rong

(College of Engineering, South China Agric. Univ., Guangzhou 510642, China)

Abstract: By using matrix method, kinematics analysis mathematical models of common basal group linkages are established, and their program modules of displacement, velocity and acceleration are established. A CAD system of the analysis and simulation for planar five-bar linkage mechanism with dual freedoms is developed in the visual language (Visual Basic 6.0). The software has the functions of numerical computation, motion chart drawing and motion simulating. The correctness of the mathematical models was validated by using automatic dynamic analysis software of mechanical system ADAMS.

Key words: planar five-bar mechanism; kinematics analysis; bar group method; mathematical model

闭链二自由度平面混合驱动五杆机构可实现复杂运动规律, 是目前应用较普遍的一种机构, 如平面二自由度并联机械手和混合输入型机电系统都采用二自由度平面五杆机构.

机构运动分析的解析法将机构运动参数和结构参数之间的关系用数学解析式来描述, 可对机构在整个运动循环过程中任意位置的运动性能进行深入分析, 分析精度高^[1]. 按分析过程不同, 平面机构运动分析可分为整体分析法和杆组法等多种. 用杆组法对机构进行运动分析时, 将机构分解成若干基本杆组, 再分别调用相应的已经编好的基本杆组运动分析子程序, 输入已知的运动参数, 就能求出所需的运动参数. 这样, 复杂机构运动分析问题就转化为杆组的分析计算问题. 按所使用的数学工具不同, 平面

机构运动分析解析法有封闭矢量多边形投影法、复数向量法、矩阵法等. 鉴于杆组法简单灵活且通用性强, 矩阵法分析快捷等优点, 本文应用矩阵法建立了常用平面五杆机构基本杆组的数学模型.

1 基本杆组类型及运动分析递推路线

闭链二自由度平面五杆机构可分为全铰链五杆机构和单滑块五杆机构 2 大类. 考虑到输入及输出构件的位置, 还可细分为不同的类型. 如图 1 所示, 五杆机构原动件 1、4 与机架 5 相连, 则机构可分为“原动件与机架组”和由构件 2、3 组成的自由度为 0 的 II 级杆组, II 级杆组有 RRR、RRP、RPR 等类型. 原动件 1、4 通过外部副 B、D 与 II 级杆组相接, 则运动分析的递推路线应从“原动件与机架组”到与其外部

副相连的 II 级杆组。当两原动件 1、4 输入给定的具体规律运动, 依编好的程序可求得外部副 B、D 的输出运动。对 II 级杆组, 外部副 B、D 运动输入已知, 则杆组的运动输出也就确定^[2]。

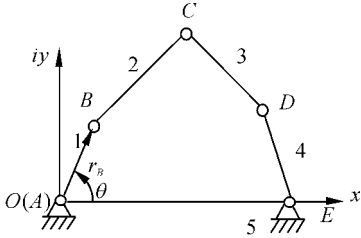


图 1 平面五杆机构

Fig. 1 A planar five-bar mechanism

2 机构运动分析矩阵法的一般形式

对平面多杆机构, 具有确定运动的条件是原动件数等于其所具有的自由度数。选择与机构自由度数相同的广义坐标作为机构的运动输入, 则机构就有确定的运动输出。若机构有 k 个自由度, 则 k 个广义运动输入为

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_k]^T,$$

n 个广义运动输出为

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T,$$

机构广义输入运动和广义输出运动可以是直线运动或曲线运动。

机构广义结构参数向量是常数向量, 可表示为

$$L = [l_1, l_2, \dots, l_m]^T,$$

向量的元素可以是尺寸参数或角度参数。

设机构的输入输出位移函数关系为一组独立运动方程组^[3]

$$F(q, u, L) = 0, \quad (1)$$

$F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ 为 n 个独立运动方程, 可解出 n 个输出运动。

理论上, 由式 (1) 得输入、输出运动关系

$$u = u(q, L), \quad (2)$$

但对于多输入、多输出机构, 式 (1) 通常为多元复合隐函数, 难以求得显函数式 (2), 更难以直接由 (2) 式对时间求导得出输出构件的速度、加速度。因此, 直接将式 (1) 对时间连续求导, 可得到输出速度函数和加速度函数的一般矩阵表达式

$$u = - \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial q} \right] \dot{q}, \quad (3)$$

$$\ddot{u} = - \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^{-1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) u + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial q} \ddot{q} \right], \quad (4)$$

式中:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial q_k} \end{bmatrix}.$$

运用上述的矩阵分析法, 可以求得机构的输出速度和加速度。

3 常用平面五杆机构杆组运动分析数学模型

3.1 原动件数学模型的建立

如图 1 所示, 在复数坐标系中, 设原动件曲柄 AB 通过转动副 A 与机架连接, 复向量 \overrightarrow{AB} 的模 r 为常数、幅角 θ 为变量。如以转动副 A 为坐标系原点, 则曲柄端点 B 位置、速度和加速度推导如下:

$$r_B = r e^{i\theta}. \quad (5)$$

将方程 (5) 两边对时间 t 分别求一阶、二阶导数得

$$\dot{r}_B = r i \dot{\theta} e^{i\theta}, \quad (6)$$

$$\ddot{r}_B = r e^{i\theta} (i \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2). \quad (7)$$

将式 (5)、(6)、(7) 写成矩阵形式:

$$B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (5')$$

$$\dot{B} = \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \dot{\theta} \sin \theta \\ r \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (6')$$

$$\ddot{B} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_B \\ \ddot{y}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ r \ddot{\theta} \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (7')$$

另一原动件 ED 无论作何种运动, 由于运动规律已知, 同理可求出其外部副 D 的 r_D 、 \dot{r}_D 和 \ddot{r}_D 及其矩阵形式。

设平面五杆机构两原动件外部副 B 和 D, 如图 2 所示, 添加虚拟杆 BD, 其位置矢量 l_{BD} , 则矢量方程

$$l_{BD} = r_D - r_B.$$

把方程投影在 x, y 坐标轴, 可求得虚拟杆 BD 的杆长和角位置为

$$l_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}, \quad (8)$$

$$\varphi_{BD} = \arctan \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B}. \quad (9)$$

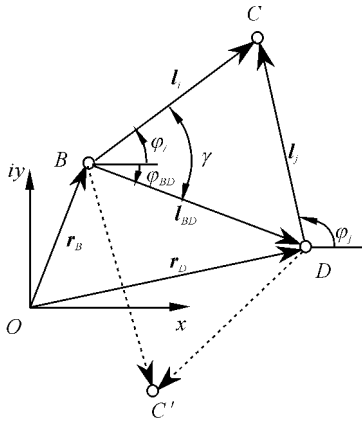


图 2 RRR II 级杆组
Fig. 2 RRR II bar group

3.2 RRR II 级杆组数学模型

由 BC, CD 2 个构件和 3 个转动副所组成的 RRR II 级基本杆组如图 2 所示. 两构件的长度 l_i, l_j 为常量, 该双杆组应满足 $l_{BDmax} \leq l_i + l_j$ 和 $l_{BDmin} \geq |l_i - l_j|$ 的装配条件.

杆组 2 个转动副 B, D 的运动已知, 可求构件 l_i, l_j 的角位置 φ_i, φ_j , 角速度 $\dot{\varphi}_i, \dot{\varphi}_j$, 角加速度 $\ddot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_j$ 及构件 BC 上任意点 P 的坐标、速度和加速度.

3.2.1 杆组角位置 φ_i 和 φ_j 在图 2 矢量三角形 BCD 中

$$\gamma = \arccos \frac{l_i^2 + l_{BD}^2 - l_j^2}{2l_i l_{BD}}, \quad (10)$$

则 l_i 杆的角位置为

$$\varphi_i = \varphi_{BD} + M\gamma, \quad (11)$$

式中, γ 取值范围为 $0 \leq \gamma \leq 180^\circ$; M 称为位置模式系数. 当双杆组处于图中实线位置 BCD 时, 角 γ 是由矢量 l_{BD} 沿逆时针方向转到矢量 l_i , 取 $M=1$; 当双杆组处于图 2 中虚线位置 $BC'D$ 时, 角 γ 是由矢量 l_{BD} 沿顺时针方向转到矢量 l_i , 取 $M=-1$.

C 点位置方程为

$$\begin{cases} x_C = x_B + l_i \cos \varphi_i \\ y_C = y_B + l_i \sin \varphi_i \end{cases}, \quad (12)$$

则构件 j 的位置角

$$\varphi_j = \arctan \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D}. \quad (13)$$

3.2.2 杆组角速度和角加速度 由于角位置 φ_i 式(11)和 φ_j 式(13)都是多元复合函数, 难以直接求得角速度 ω_i, ω_j , 角加速度 α_i, α_j , 所以利用矩阵法进行分析.

如图 2 所示, 杆组的矢量方程为

$$r_B + l_i = r_D + l_j,$$

向 x, y 坐标轴投影得

$$\begin{cases} f_1 = x_B + l_i \cos \varphi_i - x_D - l_j \cos \varphi_j = 0 \\ f_2 = y_B + l_i \sin \varphi_i - y_D - l_j \sin \varphi_j = 0 \end{cases},$$

由于

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2)^T = (\varphi_i, \varphi_j)^T, \\ q &= (q_1, q_2, q_3, q_4)^T = (x_B, y_B, x_D, y_D)^T, \\ F &= (f_1, f_2)^T, \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} C_i &= l_i \cos \varphi_i, \\ S_i &= l_i \sin \varphi_i, \\ C_j &= l_j \cos \varphi_j, \\ S_j &= l_j \sin \varphi_j, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \begin{bmatrix} -S_i & S_j \\ C_i & -C_j \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^{-1} &= \frac{1}{S_i C_j - C_i S_j} \begin{bmatrix} -C_j & -S_j \\ -C_i & -S_i \end{bmatrix}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) &= \begin{bmatrix} -C_i \dot{\varphi}_i & C_j \dot{\varphi}_j \\ -S_i \dot{\varphi}_i & S_j \dot{\varphi}_j \end{bmatrix}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将上述各项代入式(3)、式(4), 求得杆组的角速度和角加速度:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_i \\ \dot{\varphi}_j \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{C_i S_j - C_j S_i} \begin{bmatrix} -C_j \dot{x}_B - S_j \dot{y}_B + C_j \dot{x}_D + S_j \dot{y}_D \\ -C_i \dot{x}_B - S_i \dot{y}_B + C_i \dot{x}_D + S_i \dot{y}_D \end{bmatrix}, \quad (14) \\ \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_i \\ \ddot{\varphi}_j \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{C_i S_j - C_j S_i} \begin{bmatrix} C_j & S_j \\ C_i & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i \ddot{\varphi}_i^2 - C_j \ddot{\varphi}_j^2 - \ddot{x}_B + \ddot{x}_D \\ S_i \ddot{\varphi}_i^2 - S_j \ddot{\varphi}_j^2 - \ddot{y}_B + \ddot{y}_D \end{bmatrix}. \quad (15) \end{aligned}$$

3.2.3 杆组任意点 P 的坐标 x_P, y_P , 速度 \dot{x}_P, \dot{y}_P 和加速度 \ddot{x}_P, \ddot{y}_P 如图 3 所示, 设 P 点位于构件 l_i 上, P 点距 B 为 l_{iP} , l_i 与 l_{iP} 的夹角为 α_i , 矢量方程

$$r_P = r_B + l_{iP}$$

投影在 x, y 坐标轴, 可得

$$\begin{cases} x_P = x_B + l_{ip} \cos(\varphi_i + \alpha_i) \\ y_P = y_B + l_{ip} \sin(\varphi_i + \alpha_i) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_P = \dot{x}_B - l_{ip} \dot{\varphi}_i \sin(\varphi_i + \alpha_i) \\ \dot{y}_P = \dot{y}_B + l_{ip} \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i + \alpha_i) \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_P = \ddot{x}_B - l_{ip} [\ddot{\varphi}_i \sin(\varphi_i + \alpha_i) + \dot{\varphi}_i^2 \cos(\varphi_i + \alpha_i)] \\ \ddot{y}_P = \ddot{y}_B + l_{ip} [\ddot{\varphi}_i \cos(\varphi_i + \alpha_i) - \dot{\varphi}_i^2 \sin(\varphi_i + \alpha_i)] \end{cases} \quad (18)$$

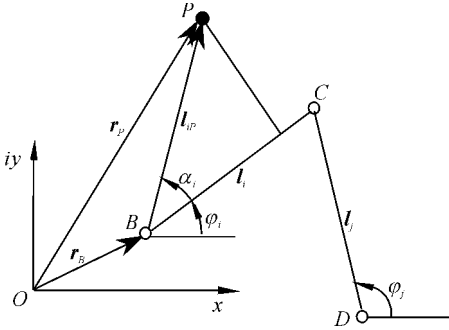


图 3 杆组任意点 P 的运动分析

Fig. 3 Kinematics analysis of a point in RRR II

若 P 点在构件 l_j 上, 则由 $r_P = r_D + l_{jP}$ 同理可求得 P 点的运动参数.

同理可建立 RRP、RPR 等 II 级杆组的运动分析数学模型, 过程不在此叙述.

4 程序结构组成与算例分析

4.1 程序结构组成

利用 VB6.0 面向对象的程序设计语言, 基于前述数学模型, 开发出二自由度平面五杆机构的运动分析与仿真程序. 程序主设计界面负责基本杆组预览及最终分析结果的显示, 在子设计界面中输入已知的原始数据(杆长、原动件的运动情况等). 根据本数学模型编制的单杆构件、原动件与机架组、RRR、RRP、RPR II 级基本杆组运动分析子程序模块, 能完成各个基本杆组的运动分析、运动线图的绘制、分析数据的显示及机构的动态仿真.

4.2 算例分析

图 4 所示二自由度平面混合驱动五杆机构由曲柄、RRR II 级杆组和滑块组成, 曲柄 AB 和滑块 D 为原动件. 曲柄 AB 以匀角速度 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 逆时针方向回转, 滑块 D 沿滑道的位移 $S_D = 100 + 50 \sin 10t$ (式中 S_D, t 的单位分别为 mm、s). 构件 AB、BC、CD 杆长分别为 $l_1 = 20 \text{ mm}$, $l_2 = 105 \text{ mm}$, $l_3 = 55 \text{ mm}$, 滑道偏心距 $e = 10 \text{ mm}$. 坐标系如图 4 所示. 设该机构满足可动性充分条件, 利用本文建立的数学模型编制的程序在原动件一个运动循环内对机构进行运动仿真, 结果如图 5 所示.

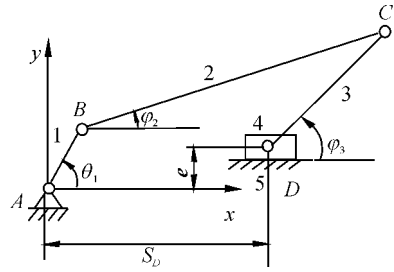


图 4 二自由度平面五杆机构

Fig. 4 A planar five bar mechanism

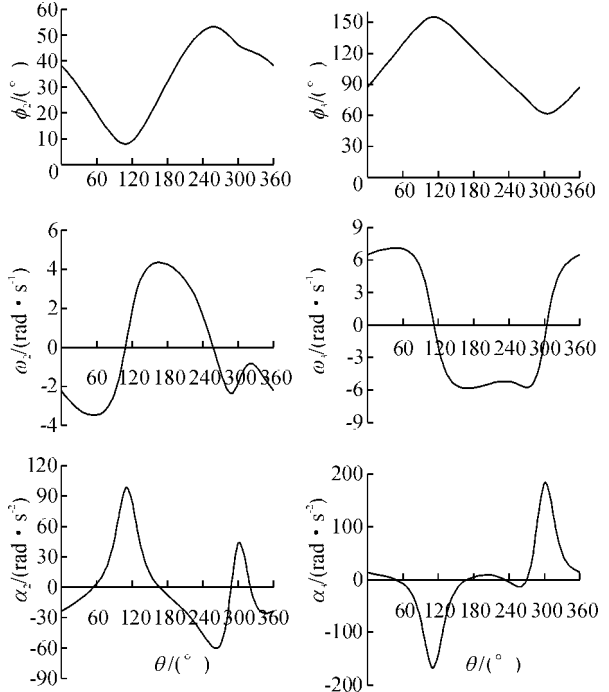


图 5 构件 2、构件 3 仿真运动线图

Fig. 5 The results of simulation for bar II and bar III

在上述算例机构中, 设定铰点 C 为输出端, 采用本文编制的仿真程序, 在原动件一个运动循环内对 C 点进行运动分析, 可得出 C 点的位移、速度、加速度运动参数.

在机构动力学仿真分析软件 ADAMS (Automated Dynamic Analysis of Mechanical Systems) 的环境下, 采用算例机构的具体参数建立机构的虚拟样机模型, 对机构进行运动仿真, 直接从虚拟样机上提取 C 点的运动参数^[4, 5].

以上 2 种结果的 C 点轨迹曲线见图 6.

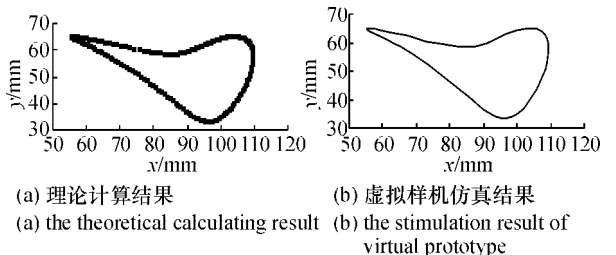


图 6 机构的输出端 C 运动轨迹图

Fig. 6 The track of point C of the mechanism

对比图 6(a)、(b)可知, 虚拟样机仿真结果与理论计算结果完全吻合。同样, 依照本文编制的程序所获得的 C 点速度和加速度数据与虚拟样机上 C 点的速度、加速度仿真结果也完全吻合, 说明本文建立的数学模型和编程是正确的。

5 结论

本文建立了常用平面五杆机构杆组运动分析数学模型, 编制了基于该模型的机构运动分析软件, 应用虚拟样机技术对数学模型和编制的程序进行了验证。由题例看出, 该分析软件可有效地应用于常用平面二自由度五杆机构的运动分析, 精确计算任意 II 级机构当原动件在一个循环内时每个位置的运动参数, 自动绘制运动线图。任意输入原始数据, 可获得

各种类型的平面五杆机构运动参数和运动线图, 具有较强的通用性。此外, 所建立的数学模型可用于进一步评价机构的运动和动力性能。

参考文献:

- [1] 申永胜. 机械原理教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999. 58—68.
- [2] 王保平, 廖仁文. 多杆多自由度机构的分析与模拟[J]. 军械工程学院院报, 1998, 10(1): 49—54.
- [3] 师忠秀, 慕明正, 程强. 平面连杆机构的杆组法运动分析及仿真[J]. 青岛大学学报, 2003, 18(4): 24—26.
- [4] 郭卫东, 张玉茹. 两自由度闭链触觉再现机构的设计与仿真[J]. 中国机械工程, 2004, 15(5): 438—441.
- [5] 王国强. 虚拟样机技术及其在 ADAMS 上的实践[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2002. 1—50.

【责任编辑 李晓卉】

(上接第 70 页)

- [12] 习岗, 杨初平, 宋清, 等. 香蕉 Chla 荧光动力学参量对激发光强的反应[J]. 光子学报, 2001, 30(4): 1 041—1 044.
- [13] RENGER G, SCHREIER U. Practical applications of fluorimetric methods to algae and higher plant research[A]. GVOINDJEE. Light Emission by Plants and Bacteria[C]. London: Academic Press, 1986. 587—618.
- [14] 习岗, 杨初平, 宋清. 烟草光合细胞 Chla 荧光动力学和超弱发光对低强度射频电磁场的响应[J]. 光子学报, 2004, 33(5): 622—625.
- [15] SCHREIBER U, BILGERW N C. Chlorophyll fluorescence as Q nonintrusive indicator for rapid assessment of *in vivo* photosynthesis[A]. SCHULZE E D, CALDWELL M M. Eco-physiology of Photosynthesis[C]. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 49—70.
- [16] SCHREIBER U. New ways of assessing photosynthetic activi-

ty with a pulse modulation fluorometer[A]. LICHTENTHALER H K. Applications of Chlorophyll Fluorescence in Photosynthesis Research, Stress Physiology, Hydrobiology and Remote Sensing[C]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 63—69.

- [17] LICHTENTHALER H K. *In vivo* chlorophyll fluorescence as a tool for stress detection in plants[A]. LICHTENTHALER H K. Applications of Chlorophyll Fluorescence in Photosynthesis Research, Stress Physiology, Hydrobiology and Remote Sensing[C]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 129—142.
- [18] 朱新广, 张其德, 匡廷云. NaCl 对小麦光合功能的伤害主要是由离子效应造成的[J]. 植物学通报, 2000, 17(4): 360—365.
- [19] 赵东红, 李建宏, 张双全, 等. 低功率微波辐射对离体人红细胞的损伤效应[J]. 环境科学进展, 1998, 6(4): 70—74.

【责任编辑 李晓卉】